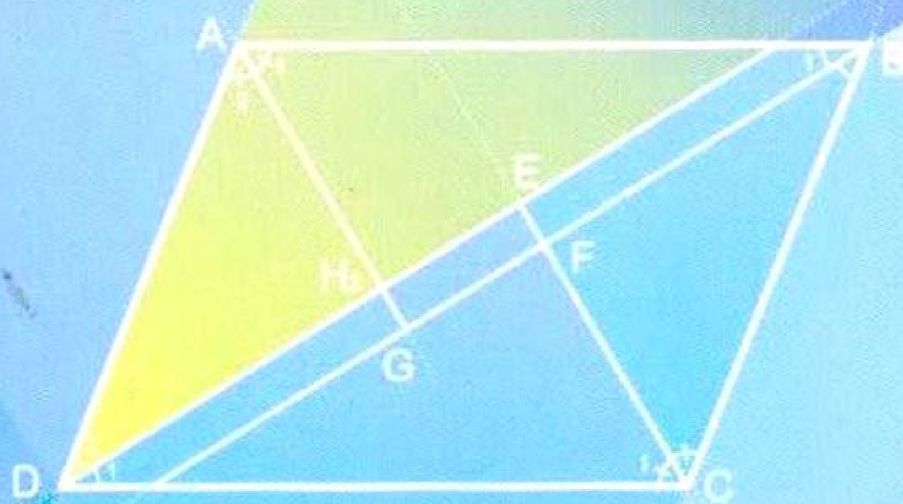
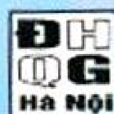
LÊ NHỨT - HUỲNH ĐỊNH TƯỜNG

GIẢI BÀI TẬP TOÁN 8

TẬP MỘT





NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LÊ NHỨT - HUỲNH ĐỊNH TƯỜNG

Giải bài tập

TOÁN 8

Tập một



NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Đơn vị liên kết :
Công ty Sách hoa hồng

Lời nói đầu

Quyển sách ***GIẢI BÀI TẬP TOÁN 8 tập một*** *này được biên soạn theo chương trình sách giáo khoa hiện hành, nhằm giúp các em có tài liệu tham khảo để ôn tập, củng cố kiến thức, đồng thời vận dụng để làm những bài tập có dạng tương tự hoặc nâng cao đạt kết quả tốt.*

Quý thầy cô và quý phụ huynh có thể xem quyển sách này như tài liệu tham khảo thêm.

Chúng tôi mong đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.

NHÓM BIÊN SOẠN

PHẦN ĐẠI SỐ

Chương I. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

§1. NHÂN ĐƠN THỨC VỚI ĐA THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Quy tắc nhân một số với một tổng: Cho a, b, c $\in$ R, ta có: $a(b \pm c) = ab \pm ac$
2. Quy tắc nhân đơn thức với đa thức: Muốn nhân một đơn thức với một đa thức ta nhân đơn thức với từng số hạng của đa thức rồi cộng các tích với nhau.
3. Tổng quát: Cho A, B, C là các đơn thức, ta có: $A(B \pm C) = A.B \pm A.C$
4. Các phép tính về lũy thừa:

$a^n = \underbrace{a.a.........a}_{n \text{ thừa số } a}$ $(n \in N)$. Ví dụ: $x^6 = \underbrace{x.x...x}_{6}$

$a^0 = 1$ $(a \neq 0)$. Ví dụ: $5^0 = 1$.

$a^n.a^m = a^{m+n}$. Ví dụ: $x^2.x^3 = x^{2+3} = x^5$.

$a^n : a^m = a^{n-m}$ $(n \geq m)$. Ví dụ: $x^5 : x^3 = x^{5-3} = x^2$.

$(a^m)^n = a^{m.n}$. Ví dụ: $(x^3)^2 = x^{3.2} = x^6$.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Làm tính nhân: $3x^2(5x^2 - 2x - 4)$.
2. Tìm x, biết: $3x(12x - 4) - 2x(18x + 3) = 36$.

Giải

1. $3x^2(5x^2 - 2x - 4) = 3x^2.5x^2 - 3x^2.2x - 3x^2.4 = 15x^4 - 6x^3 - 12x^2$
2. Ta có: $3x(12x - 4) - 2x(18x + 3) = 36$

$$36x^2 - 12x - 36x^2 - 6x = 36$$
$$-18x = 36$$
$$x = -2.$$

Vậy $x = -2$.

B. Bài tập căn bản

1. Làm tính nhân:

a) $x^2(5x^3 - x - \frac{1}{2})$; b) $(3xy - x^2 + y)\frac{2}{3}x^2y$; c) $(4x^3 - 5xy + 2x)(-\frac{1}{2}xy)$.

Giải

a) $x^2(5x^3 - x - \frac{1}{2}) = 5x^5 - x^3 - \frac{1}{2}x^2$

b) $(3xy - x^2 + y)\frac{2}{3}x^2y = 2x^3y^2 - \frac{2}{3}x^4y + \frac{2}{3}x^2y^2$

c) $(4x^3 - 5xy + 2x)(-\frac{1}{2}xy) = -2x^4y + \frac{5}{2}x^2y^2 - x^2y$

2. Thực hiện phép nhân, rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức:

a) $x(x - y) + y(x + y)$ tại $x = -6$; $y = 8$

b) $x(x^2 - y) - x^2(x + y) + y(x^2 - x)$ tại $x = \frac{1}{2}$; $y = -100$

Giải

a) $x(x - y) + y(x + y)$ tại $x = -6$; $y = 8$

* Trước hết ta thu gọn đa thức:

$$x(x - y) + y(x + y) = x^2 - xy + xy + y^2 = x^2 + y^2$$

* Thay $x = -6$; $y = 8$ vào đa thức thu gọn, ta được:

$$x^2 + y^2 = (-6)^2 + (8)^2 = 36 + 64 = 100$$

Vậy giá trị của biểu thức đã cho bằng 100.

b) $x(x^2 - y) - x^2(x + y) + y(x^2 - x)$ tại $x = \frac{1}{2}$; $y = -100$

Ta có: $x(x^2 - y) - x^2(x + y) + y(x^2 - x) = x^3 - xy - x^3 - x^2y + x^2y - xy = -2xy$

Với $x = \frac{1}{2}$; $y = -100$, ta có: $-2xy = -2.\frac{1}{2}(-100) = 100$

Vậy giá trị của biểu thức đã cho bằng 100.

3. Tìm x, biết:

a) $3x(12x - 4) - 9x(4x - 3) = 30$; b) $x(5 - 2x) + 2x(x - 1) = 15$.

Giải

a) $3x(12x - 4) - 9x(4x - 3) = 30$

$36x^2 - 12x - 36x^2 + 27x = 30$

$15x = 30$

$x = 2$

Vậy $x = 2$.

b) $x(5 - 2x) + 2x(x - 1) = 15$

$5x - 2x^2 + 2x^2 - 2x = 15$

$3x = 15$

$x = \frac{15}{3} = 5$

Vậy $x = 5$.

4. Đố. Đoán tuổi. Bạn hãy lấy tuổi của mình:

Cộng thêm 5.

Được bao nhiêu đem nhân với 2.

Lấy kết quả trên cộng với 10.

Nhân kết quả vừa tìm được với 5.

Đọc kết quả cuối cùng sau khi đã trừ đi 100.

Tôi sẽ đoán được tuổi của bạn. Giải thích tại sao?

5. Rút gọn biểu thức:

a) $x(x - y) + y(x - y)$;　　　　b) $x^{n-1}(x + y) - y(x^{n-1} + y^{n-1})$

6. Đánh dấu × vào ô mà em cho là đáp số đúng:

Giá trị của biểu thức: $ax(x - y) + y^3(x + y)$ tại $x = -1$; $y = 1$ (a là hằng số)

a	
$-a + 2$	
$-2a$	
$2a$	

Giải

3, 4. Học sinh tự làm.

5. a) $x(x - y) + y(x - y) = x^2 - xy + xy - y^2 = x^2 - y^2$

b) $x^{n-1}(x + y) - y(x^{n-1} + y^{n-1}) = x^{n-1}x + x^{n-1}.y - y.x^{n-1} - y.y^{n-1} = x^n - y^n$

6. Để đánh dấu × vào ô mà em cho là đáp số đúng trước hết ta đi tính giá trị của biểu thức: $ax(x - y) + y^3(x + y)$ với $x = -1$; $y = 1$ (a là hằng số).

Ta có: $ax(x - y) + y^3(x + y) = ax^2 - axy + xy^3 + y^4$

$= a(-1)^2 - a(-1).1 + (-1).1^3 + 1^4 = a + a - 1 + 1 = 2a$

Vậy ta đánh dấu × vào ô có kết quả là 2a.

§2. NHÂN ĐA THỨC VỚI ĐA THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Quy tắc:* Muốn nhân một đa thức với một đa thức ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.
2. *Tổng quát:* Cho A, B, C, D là các đa thức.

   Ta có: $(A + B).(C + D) = A(C + D) + B(C + D)$

   $= AC + AD + BC + BD$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Làm tính nhân:

a) $(6x^2 + 5y^2).(2x^2 - 3y^2)$; b) $(1 - 3x^2 + x)(x^2 - 5 + x)$.

2. Giải phương trình: $6x^2 - (2x + 5)(3x - 2) = 7$.

Giải

1. a) $(6x^2 + 5y^2).(2x^2 - 3y^2) = 6x^2(2x^2 - 3y^2) + 5y^2(2x^2 - 3y^2)$

$= 12x^4 - 18y^2x^2 + 10y^2x^2 - 15y^4$

$= 12x^4 - 8x^2y^2 - 15y^4$

b) $(1 - 3x^2 + x)(x^2 - 5 + x) = 1(x^2 - 5 + x) - 3x^2(x^2 - 5 + x) + x(x^2 - 5 + x)$

$= x^2 - 5 + x - 3x^4 + 15x^2 - 3x^3 + x^3 - 5x + x^2$

$= -3x^4 - 2x^3 + 17x^2 - 4x - 5$

2. Ta có: $6x^2 - (2x + 5)(3x - 2) = 7 \Leftrightarrow 6x^2 - (6x^2 - 4x + 15x - 10) = 7$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 6x^2 + 4x - 15x + 10 = 7$

$\Leftrightarrow -11x + 10 = 7 \Leftrightarrow -11x = 7 - 10$

$\Leftrightarrow -11x = -3 \qquad \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{11}$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = \dfrac{3}{11}$.

B. Bài tập căn bản

7. Làm tính nhân: a) $(x^2 - 2x + 1)(x - 1)$

b) $(x^3 - 2x^2 + x - 1)(5 - x)$

Từ câu b) hãy suy ra kết quả phép nhân: $(x^3 - 2x^2 + x - 1)(x - 5)$.

Giải

a) $(x^2 - 2x + 1)(x - 1) = x^2(x - 1) - 2x(x - 1) + 1(x - 1)$

$= x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

b) $(x^3 - 2x^2 + x - 1)(5 - x) = x^3(5 - x) - 2x^2(5 - x) + x(5 - x) - 1.(5 - x)$

$= 5x^3 - x^4 - 10x^2 + 2x^3 + 5x - x^2 - 5 + x$

$= -x^4 + 7x^3 - 11x^2 + 6x - 5$

Suy ra kết quả của phép nhân:

$$(x^3 - 2x^2 + x - 1)(x - 5) = x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 6x + 5$$

8. Làm tính nhân:

a) $(x^2y^2 - \dfrac{1}{2}xy + 2y)(x - 2y)$; b) $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$.

Giải

a) $(x^2y^2 - \frac{1}{2}xy + 2y)(x - 2y) = x^2y^2(x - 2y) - \frac{1}{2}xy(x - 2y) + 2y(x - 2y)$

$= x^3y^2 - 2x^2y^3 - \frac{1}{2}x^2y + xy^2 + 2xy - 4y^2.$

b) $(x^2 - xy + y^2)(x + y) = x^2(x + y) - xy(x + y) + y^2(x + y)$

$= x^3 + x^2y - x^2y - xy^2 + xy^2 + y^3 = x^3 + y^3$

9. Điền kết quả tính được vào bảng

Giá tri của x, y	Giá trị của biểu thức: $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
$x = -10; y = 2$	
$x = -1; y = 0$	
$x = 2; y = -1$	
$x = -0,5; y = 1,25$ (trường hợp này có thể dùng máy tính bỏ túi)	

Giải

Ta thực hiện phép nhân đa thức để thu gọn kết quả rồi tính giá trị của biểuthức ứng với từng giá trị của x, y đã cho trong bảng, rồi điền vào bảng.

Ta có: $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2)$

$= x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$

* Với $x = -10; y = 2$ thì: $x^3 - y^3 = (-10)^3 - (2)^3 = -1000 - (8) = -1008$
* Với $x = -1; y = 0$ thì: $x^3 - y^3 = (-1)^3 - (0)^3 = -1 - 0 = -1$
* Với $x = 2; y = -1$ thì: $x^3 - y^3 = (2)^3 - (-1)^3 = 8 - (-1) = 9$
* Với $x = -0,5$ và $y = 1,25$ thì:

$x^3 - y^3 = (-0,5)^3 - (1,25)^3 = -0,125 - 1,953125 = -2,078125.$

Luyện tập

10. Thực hiện phép tính:

a) $(x^2 - 2x + 3)(\frac{1}{2}x - 5)$; b) $(x^2 - 2xy + y^2)(x - y)$

Giải

a) $x^2 - 2x + 3)(\frac{1}{2}x - 5) = \frac{1}{2}x(x^2 - 2x + 3) - 5(x^2 - 2x + 3)$

$= \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{3}{2}x - 5x^2 + 10x - 15$

$= \frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + \frac{23}{2}x - 15$

b) $(x^2 - 2xy + y^2)(x - y) = x(x^2 - 2xy + y^2) - y(x^2 - 2xy + y^2)$
$= x^3 - 2x^2y + xy^2 - x^2y + 2xy^2 - y^3$
$= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

11. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến: $(x - 5)(2x + 3) - 2x(x - 3) + x + 7$.

Giải

Ta thực hiện phép tính, thu gọn xong biểu thức không còn chứa biến.
Thật vậy:
$(x - 5)(2x + 3) - 2x(x - 3) + x + 7 = 2x^2 + 3x - 10x - 15 - 2x^2 + 6x + x + 7 = -8$
Điều này chứng tỏ biểu thức không phụ thuộc vào giá trị của biến.

12. Tính giá trị biểu thức: $(x^2 - 5)(x + 3) + (x + 4)(x - x^2)$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $x = 0$; b) $x = 15$; c) $x = -15$; d) $x = 0,15$.

Giải

Trước hết ta thu gọn biểu thức, sau đó thay giá trị của x vào biểu thức thu gọn để tính giá trị.
Đặt $A = (x^2 - 5)(x + 3) + (x + 4)(x - x^2)$
$= x^3 + 3x^2 - 5x - 15 + x^2 - x^3 + 4x - 4x^2 = -x - 15 = -(x + 15)$
– Với $x = 0$: $A = -(x + 15) = -(0 + 15) = -15$
– Với $x = 15$: $A = -(x + 15) = -(15 + 15) = -30$
– Với $x = -15$: $A = -(x + 15) = -(-15 + 15) = 0$
– Với $x = 0,15$: $A = -(x + 15) = -(0,15 + 15) = -15,15$

13. Tìm x, biết: $(12x - 5)(4x - 1) + (3x - 7)(1 - 16x) = 81$.

Giải

$(12x - 5)(4x - 1) + (3x - 7)(1 - 16x) = 81$
$\Leftrightarrow 48x^2 - 12x - 20x + 5 + 3x - 48x^2 - 7 + 112x = 81$
$\Leftrightarrow 83x - 2 = 81 \Leftrightarrow 83x = 81 + 2 = 83 \Leftrightarrow x = 1$.
Vậy $x = 1$.

14. Tìm ba số tự nhiên chẵn liên tiếp, biết tích của 2 số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 192.

Giải

Gọi $2x$, $2x + 2$, $2x + 4$ là ba số tự nhiên chẵn liên tiếp ($x \in N$)
Theo đề bài, ta có: $(2x + 2)(2x + 4) = 2x(2x + 2) + 192$
$\Leftrightarrow 4x^2 + 8x + 4x + 8 = 4x^2 + 4x + 192$
$\Leftrightarrow 8x = 184 \Leftrightarrow x = 23$
Vậy ba số đã cho là 46, 48, 50.

15. Làm tính nhân:

a) $(\frac{1}{2}x + y)(\frac{1}{2}x + y)$; b) $(x - \frac{1}{2}y)(x - \frac{1}{2}y)$.

Giải

a) $(\frac{1}{2}x + y)(\frac{1}{2}x + y) = \frac{1}{2}x(\frac{1}{2}x + y) + y(\frac{1}{2}x + y)$

$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}xy + y^2 = \frac{1}{4}x^2 + xy + y^2$

b) $(x - \frac{1}{2}y)(x - \frac{1}{2}y) = x(x - \frac{1}{2}y) - \frac{1}{2}y(x - \frac{1}{2}y)$

$= x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 = x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2$

§3.4.5. NHỮNG HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

A. Các hằng đẳng thức đáng nhớ

1. $(A + B)^2 = A^2 + 2.AB + B^2$
2. $(A - B)^2 = A^2 - 2.AB + B^2$
3. $(A)^2 - (B)^2 = (A + B)(A - B)$
4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$
6. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
7. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$
8. $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2BC + 2CA$
9. $(a)^n - (b)^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}.b + ... + a.b^{n-2} + b^{n-1})$

B. Cần nhớ các phép tính về lũy thừa

1. $a^n = \underbrace{a.a....a}_{n \text{ thừa số } a}$ 2. $a^0 = 1$ $(a \neq 0)$

3. $a^m.a^n = a^{m+n}$ 4. $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(m > n)$ 5. $(a^m)^n = a^{m.n}$.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập căn bản

- **Bài tập mục §3**

16. Viết các biểu thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu:

a) $x^2 + 2x + 1$; b) $9x^2 + y^2 + 6xy$;

c) $25a^2 + 4b^2 - 20ab$; d) $x^2 - x + \frac{1}{4}$.

Giải

a) $x^2 + 2x + 1 = (x)^2 + 2x.1 + 1^2 = (x + 1)^2$

b) $9x^2 + y^2 + 6xy = (3x)^2 + 2(3x).y + y^2 = (3x + y)^2$

c) $25a^2 + 4b^2 - 20ab = (5a)^2 - 2(5a)(2b) + (2b)^2 = (5a - 2b)^2$

d) $x^2 - x + \frac{1}{4} = x^2 - 2(x).\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 = (x - \frac{1}{2})^2$

17. Chứng minh rằng: $(10a + 5)^2 = 100a.(a + 1) + 25$.

Từ đó em hãy nêu cách tính nhẩm bình phương của một số tự nhiên có tận cùng bằng một chữ số 5.

Áp dụng để tính: 25^2 ; 35^2 ; 65^2; 75^2.

Giải

* *Cách 1:* Chứng minh: $(10a + 5)^2 = 100a.(a + 1) + 25$

Thật vậy: $(10a + 5)^2 = (10a)^2 + 2.10a.5 + 5^2$

$= 100a^2 + 100a + 25 = 100a (a + 1) + 25$ (đpcm)

Cách tính nhẩm bình phương của một số có tận cùng bằng chữ số 5 thì bằng 100 lần chữ số hàng chục nhân với số hàng chục cộng 1 rồi lấy kết quả cộng với 25.

Áp dụng: $25^2 = (10.2 + 5)^2 = 100.2(2 + 1) + 25$

$= 200.3 + 25 = 600 + 25 = 625$

$35^2 = (10.3 + 5)^2 = 100.3(3 + 1) + 25 = 1225$

$65^2 = (10.6 + 5)^2 = 100.6(6 + 1) + 25 = 4225$

$75^2 = (10.7 + 5)^2 = 100.7(7 + 1) + 25 = 5625$

* *Cách 2:* Cách tính nhẩm bình phương của một số có tận cùng bằng chữ số 5.

- Lấy số tận cùng bình phương được 25, giữ nguyên.
- Lấy số hàng chục cộng 1 nhân với chính nó, được bao nhiêu ghi liền trước số 25 ta được kết quả:

Ví dụ: $35^2 = 12\ 25$; $45^2 = 20\ 25$

$55^2 = 30\ 25$; $65^2 = 42\ 25$

$75^2 = 56\ 25$; $85^2 = 72\ 25$

18. Hãy tìm cách giúp bạn An khôi phục lại những hằng đẳng thức bị mực làm nhòe đi một số chỗ:

a) $x^2 + 6xy + ... = (... + 3y)^2$.

b) $... - 10xy + 25y^2 = (... - ...)^2$.

c) Hãy nêu một đề bài tương tự.

Giải

a) Ta phân tích theo dạng các hằng đẳng thức đáng nhớ để tìm cách khôi phục: $x^2 + 6xy + \ldots = (\ldots + 3y)^2$ hay $(x)^2 + 2x(3y) + (3y)^2 = (x + 3y)^2$

b) $\ldots - 10xy + 25y^2 = (\ldots - \ldots)^2$

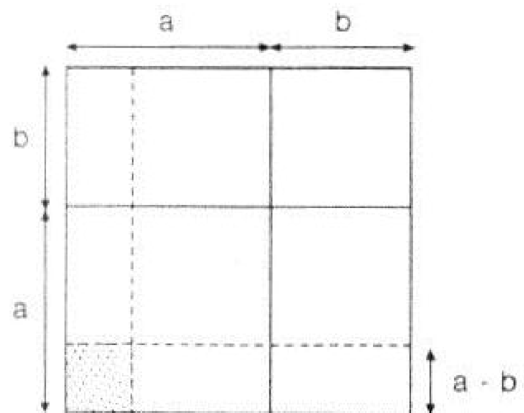
$(x)^2 - 2(x)(5y) + (5y)^2 = (x - 5y)^2$

c) Một đề bài tương tự: $(3xy^2 - \ldots)^2 = \ldots - \ldots + \frac{1}{4}x^4y^2$

19. **Đố vui**: Tính diện tích phần hình còn lại mà không cần đo.

Một miếng tôn hình vuông có cạnh bằng a + b, bác thợ cắt đi một miếng cũng hình vuông có cạnh bằng a − b (cho a > b). Diện tích phần hình còn lại là bao nhiêu? Diện tích phần hình còn lại có phụ thuộc vào vị trí cắt không?

Giải



Theo đề bài ta có diện tích miếng tôn hình vuông có cạnh bằng a + b là:

$$S_1 = (a + b)^2.$$

Diện tích miếng tôn hình vuông có cạnh bằng a − b (a > b) do bác thợ cắt ra từ hình trên là: $S_2 = (a - b)^2$.

Phần diện tích còn lại là:

$$S = S_1 - S_2 = (a + b)^2 - (a - b)^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$$

Theo đề bài ta có a, b là các số đo trước nên tích a.b có giá trị không đổi. Vậy phần diện tích còn lại S = 4ab có các giá trị không đổi hay nói cách khác hơn diện tích phần hình còn lại không phụ thuộc vào vị trí cắt.

Luyện tập

20. Nhận xét sự đúng, sai của kết quả sau: $x^2 + 2xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$.

Giải

Kết quả $x^2 + 2xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$ là SAI.

Thật vậy, ta có: $(x + 2y)^2 = (x)^2 + 2(x)(2y) + (2y)^2$

$$= x^2 + 4xy + 4y^2 \neq x^2 + 2xy + 4y^2$$

21. Viết các đa thức sau dưới dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu:

a) $9x^2 - 6x + 1$;

b) $(2x + 3y)^2 + 2.(2x + 3y) + 1$;

c) Hãy nêu một đề bài tương tự.

Giải

a) $9x^2 - 6x + 1 = (3x)^2 - 2(3x).1 + 1^2 = (3x - 1)^2$

b) $(2x + 3y)^2 + 2.(2x + 3y) + 1 = (2x + 3y + 1)^2$

c) Một đề bài tương tự: $25x^2y^4 - 10xy^3 + y^2 = (* - *)^2$

22. Tính nhanh: a) 101^2; b) 199^2; c) 47.53

Giải

a) $101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2.100.1 + 1^2 = 10201$

b) $199^2 = (200 - 1)^2 = 200^2 - 2.200.1 + 1^2 = 40000 - 400 + 1 = 39601$

c) $47.53 = (50 - 3)(50 + 3) = 50^2 - 3^2 = 2500 - 9 = 2491$

23. Chứng minh rằng: $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

Áp dụng: a) Tính $(a - b)^2$, biết $a + b = 7$ và $a.b = 12$

b) Tính $(a + b)^2$, biết $a - b = 20$ và $a.b = 3$

Giải

Ta biến đổi từ vế phức tạp ra kết quả ở vế đơn giản.

a) $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$

Thật vậy, $(a - b)^2 + 4ab = a^2 - 2ab + b^2 + 4ab$

$= a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ (đpcm)

b) $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

Thật vậy, $(a + b)^2 - 4ab = a^2 + 2ab + b^2 - 4ab$

$= a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ (đpcm)

Áp dụng:

a) Ta có: $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 7^2 - 4.12 = 49 - 48 = 1$

b) Ta có: $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab = 20^2 + 4.3 = 400 + 12 = 412$.

24. Tính giá trị của biểu thức $49x^2 - 70x + 25$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $x = 5$; b) $x = \frac{1}{7}$.

Giải

a) Với $x = 5$.

Ta có: $49x^2 - 70x + 25 = (7x)^2 - 2.7x.5 + 5^2$

$= (7x - 5)^2 = (7.5 - 5)^2 = (35 - 5)^2 = 30^2 = 900$

b) Với $x = \frac{1}{7}$

Ta có: $49x^2 - 70x + 25 = (7x - 5)^2 = (7.\frac{1}{7} - 5)^2 = (1 - 5)^2 = (-4)^2 = 16$

25. Tính:

a) $(a + b + c)^2$; b) $(a + b - c)^2$; c) $(a - b - c)^2$

Giải

Biến đổi về những hằng đẳng thức quen thuộc, rồi tính.

a) $(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2(a + b).c + c^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

b) $(a + b - c)^2 = [(a + b) - c]^2 = (a + b)^2 - 2(a + b).c + c^2$

$= a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$

c) $(a - b - c)^2 = [(a - b) - c]^2 = (a - b)^2 - 2(a - b).c + c^2$

$= a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca.$

- **Bài tập mục §4**

26. Tính: a) $(2x^2 + 3y)^3$; b) $(\frac{1}{2}x - 3)^3$.

Giải

a) $(2x^2 + 3y)^3 = (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2.(3y) + 3(2x^2)(3y)^2 + (3y)^3$

$= 8x^6 + 36x^4y + 54x^2y^2 + 27y^3$

b) $(\frac{1}{2}x - 3)^3 = (\frac{1}{2}x)^3 - 3(\frac{1}{2}x)^2.3 + 3.\frac{1}{2}x.3^2 - 3^3 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{27}{2}x - 27$

27. Viết các biểu thức sau dưới dạng lập phương của một tổng hoặc một hiệu.

a) $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1$; b) $8 - 12x + 6x^2 - x^3$.

Giải

a) Ta có: $-x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = -(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$

$= -[(x)^3 - 3x^2.1 + 3.x.1^2 - 1^3] = -(x - 1)^3 = (1 - x)^3$

b) Ta có: $8 - 12x + 6x^2 - x^3 = -(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$

$= -[(x)^3 - 3.(x)^2.2 + 3.x.(2)^2 - (2)^3] = -(x - 2)^3 = (2 - x)^3$

28. Tính giá trị các biểu thức sau: a) $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$ tại $x = 6$;

b) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ tại $x = 22$.

Giải

Ta đưa về các hằng đẳng thức đáng nhớ, rồi tính giá trị của biểu thức:

a) Với $x = 6$ ta có: $x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = (x)^3 + 3.(x)^2.4 + 3.x.(4)^2 + 4^3$

$= (x + 4)^3 = (6 + 4)^3 = 10^3 = 1000$

b) Với $x = 22$, ta có: $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x)^3 - 3.(x)^2.2 + 3.x(2)^2 - (2)^3$

$= (x - 2)^3 = (22 - 2)^3 = 20^3 = 8000$

29. **Đố vui:** Đức tính đáng quý.

Hãy viết mỗi biểu thức sau dưới dạng bình phương hoặc lập phương của một tổng hoặc một hiệu, rồi điền chữ cùng dòng với biểu thức đó vào bảng

cho thích hợp. Sau khi thêm dấu, em sẽ tìm ra một trong những đức tính quý báu của con người.

$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ N

$16 + 8x + x^2$ U

$3x^2 + 3x + 1 + x^3$ H

$1 - 2y + y^2$ Â

$(x-1)^3$	$(x+1)^3$	$(y-1)^2$	$(x-1)^3$	$(1+x)^3$	$(1-y)^2$	$(x+4)^2$

Giải

Ta có: * $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^3 - 3x^2.1 + 3.x.1^2 - 1^3 = (x-1)^3 = N$

* $16 + 8x + x^2 = 4^2 + 2.4.x + x^2 = (4+x)^2 = (x+4)^2 = U$

* $3x^2 + 3x + 1 + x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$= x^3 + 3x^2.1 + 3.x.1^2 + 1 = (x+1)^3 = (1+x)^3 = H$

* $1 - 2y + y^2 = (1-y)^2 = (y-1)^2 = Â$

Vậy:

$(x-1)^3$	$(x+1)^3$	$(y-1)^2$	$(x-1)^3$	$(1+x)^3$	$(1-y)^2$	$(x+4)^2$
N	H	Â	N	H	Â	U

- **Bài tập mục §5**

30. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(x+3)(x^2 - 3x + 9) - (54 + x^3)$;

b) $(2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2) - (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$.

Giải

a) $(x+3)(x^2 - 3x + 9) - (54 + x^3) = (x+3)(x^2 - 3x + 3^2) - (54 + x^3)$

$= (x^3 + 3^3) - (54 + x^3) = x^3 + 3^3 - 54 - x^3$

$= 3^3 - 54 = 27 - 54 = -27$

b) $(2x+y)(4x^2 - 2xy + y^2) - (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

$= (2x+y)[(2x)^2 - 2xy + y^2] - (2x-y)[(2x)^2 + 2xy + y^2]$

$= [(2x)^3 + y^3] - [(2x)^3 - y^3] = (2x)^3 + y^3 - (2x)^3 + y^3 = 2y^3$

31. Chứng minh rằng: a) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

b) $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

Áp dụng: Tính $a^3 + b^3$ biết $a.b = 6$; $a + b = -5$

Giải

Ta biến đổi vế trái (VT) ra vế phải (VP)

a) $(a+b)^3 - 3ab(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2 = a^3 + b^3$ (đpcm)

b) $(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + 3a^2b - 3ab^2 = a^3 - b^3$ (đpcm)

Áp dụng, tính: $a^3 + b^3$ với $ab = 6$; $a + b = -5$

Ta có: $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (-5)^3 - 3.6.(-5) = -35$

32. Điền vào ô trống các hạng tử thích hợp:

a) $(3x + y)(\square - \square + \square) = 27x^3 + y^3$;

b) $(2x - \square).(\square + 10x + \square) = 8x^3 - 125$.

Giải

a) $(3x + y)(\square - \square + \square) = 27x^3 + y^3$

hay $(3x + y)[(3x)^2 - 3xy + y^2] = (3x)^3 + y^3$

hay $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2) = 27x^3 + y^3$

b) $(2x - \square).(\square + 10x + \square) = 8x^3 - 125$

hay $(2x - 5)[(2x)^2 + 10x + 5^2] = (2x)^3 - 5^3$

hay $(2x - 5)(4x^2 + 10x + 25) = 8x^3 - 125$

Luyện tập

33. Tính: a) $(2 + xy)^2$; b) $(5 - 3x)^2$;

c) $(5 - x^2)(5 + x^2)$; d) $(5x - 1)^3$;

e) $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$; f) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$.

Giải

a) $(2 + xy)^2 = 2^2 + 2.2.xy + (xy)^2 = 4 + 4xy + x^2y^2$

b) $(5 - 3x)^2 = 5^2 - 2.5.3x + (3x)^2 = 25 - 30x + 9x^2$

c) $(5 - x^2)(5 + x^2) = 5^2 - (x^2)^2 = 25 - x^4$

d) $(5x - 1)^3 = (5x)^3 - 3(5x)^2.1 + 3.5x.1^2 - 1^3 = 125x^3 - 75x^2 + 15x - 1$

e) $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) = (2x - y)(2x^2 + 2xy + y^2)$

$= (2x)^3 - y^3 = 8x^3 - y^3$

f) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 - 3^3 = x^3 - 27$

34. Rút gọn các biểu thức sau: a) $(a + b)^2 - (a - b)^2$;

b) $(a + b)^3 - (a - b)^3 - 2b^3$;

c) $(x + y + z)^2 - 2(x + y + z)(x + y) + (x + y)^2$.

Giải

a) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = [(a + b) + (a - b)][(a + b) - (a - b)]$

$= (a + b + a - b)(a + b - a + b) = 2a.2b = 4ab$

b) $(a + b)^3 - (a - b)^3 - 2b^3 = [(a + b)^3 - (a - b)^3] - 2b^3$

$= [(a + b) - (a - b)][(a + b)^2 + (a + b)(a - b) + (a - b)^2] - 2b^3$

$= (a + b - a + b)(a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - b^2 + a^2 - 2ab + b^2) - 2b^3$

$= 2b(3a^2 + b^2) - 2b^3 = 6a^2b + 2b^3 - 2b^3 = 6a^2b$

c) * Cách 1:

$(x + y + z)^2 - 2(x + y + z)(x + y) + (x + y)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$

$+ 2zx - 2x^2 - 2xy - 2yx - 2y^2 - 2zx - 2zy + x^2 + 2xy + y^2 = z^2$

* Cách 2: $(x + y + z)^2 - 2(x + y + z)(x + y) + (x + y)^2$

$= [(x + y + z) - (x + y)]^2 = (x + y + z - x - y)^2 = z^2$

35. Tính nhanh:

a) $34^2 + 66^2 + 68.66$;　　　　b) $74^2 + 24^2 - 48.74$.

Giải

a) $34^2 + 66^2 + 68.66 = 34^2 + 2.34.66 + 66^2 = (34 + 66)^2 = 100^2 = 10000$

b) $74^2 + 24^2 - 48.74 = 24^2 - 2.24.74 + 74^2 = (24 - 74)^2 = (-50)^2 = 2500$

36. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $x^2 + 4x + 4$ tại $x = 98$;　　　　b) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ tại $x = 99$.

Giải

a) $x^2 + 4x + 4$ với $x = 98$

Ta có: $x^2 + 4x + 4 = (x)^2 + 2.x.2 + 2^2 = (x + 2)^2 = (98 + 2)^2 = 100^2 = 10000$

b) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ với $x = 99$

Ta có: $(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = (x + 1)^3 = (99 + 1)^3 = 100^3 = 1\ 000\ 000$

37. Dùng bút chì nối các biểu thức sao cho chúng tạo thành các hằng đẳng thức:

$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$	$x^3 + y^3$
$(x + y)(x - y)$	$x^3 - y^3$
$x^2 - 2xy + y^2$	$x^2 + 2xy + y^2$
$(x + y)^2$	$x^2 - y^2$
$(x + y)(x^2 - xy + y^2)$	$(y - x)^2$
$y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3$	$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
$(x - y)^3$	$(x + y)^3$

Giải

Nếu để có hằng đẳng thức:

$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$	$x^3 + y^3$
$(x + y)(x - y)$	$x^3 - y^3$
$x^2 - 2xy + y^2$	$x^2 + 2xy + y^2$
$(x + y)^2$	$x^2 - y^2$
$(x + y)(x^2 - xy + y^2)$	$(y - x)^2$
$y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3$	$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$
$(y - x)^3$	$(x + y)^3$

38. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $(a - b)^3 = -(b - a)^3$;　　　　b) $(-a - b)^2 = (a + b)^2$.

Giải

Ta biến đổi vế này ra vế kia hoặc ngược lại.

a) Chứng minh $(a - b)^3 = -(b - a)^3$

Ta có: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = -(b^3 - 3b^2a + 3ba^2 - a^3) = -(b - a)^3$.

b) Chứng minh $(-a - b)^2 = (a + b)^2$

Ta có: $(-a - b)^2 = [-(a + b)]^2 = (-1)^2(a + b)^2 = (a + b)^2$.

§6. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT NHÂN TỬ CHUNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Khái niệm:* Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức thành một tích của những đa thức.

   Ví dụ: Phân tích đa thức $3x^2 - 6x$ thành nhân tử.

   Ta có: $3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

2. *Ứng dụng của việc phân tích đa thức thành nhân tử:*

   Việc phân tích đa thức thành nhân tử có nhiều lợi ích giúp chúng ta rút gọn được biểu thức, tính nhanh, giải phương trình.

3. Các phương pháp phân tích thành nhân tử cơ bản thường gặp:
   - Phương pháp đặt nhân tử chung.
   - Phương pháp dùng hằng đẳng thức.
   - Phương pháp nhóm hạng tử.
   - Phối hợp nhiều phương pháp.

   Ngoài ra còn có những phương pháp đặc biệt hơn như: Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử vào đa thức, phương pháp tách hạng tử...

4. *Phương pháp đặt nhân tử chung:*
   - Khi tất cả các số hạng của đa thức có một thừa số chung, ta đặt thừa số chung đó ra ngoài dấu ngoặc ( ) để làm nhân tử chung.
   - Các số hạng bên trong dấu ( ) có được bằng cách lấy số hạng của đa thức chia cho nhân tử chung.

5. *Chú ý:* Nhiều khi cần đổi dấu các hạng tử để làm xuất hiện nhân tử chung.

   Ví dụ: $2x(x - y) + (y - x) = 2(x - y) - (x - y) = (x - y)(2x - 1)$.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^2 - x$; b) $5x^2(x - 2y) - 15x(x - 2y)$; c) $3(x - y) - 5x(y - x)$.

Giải

a) $x^2 - x = x(x - 1)$

b) $5x^2(x - 2y) - 15x(x - 2y) = 5x.x(x - 2y) - 5x.3(x - 2y) = 5x(x - 2y)(x - 3)$

c) $3(x - y) - 5x(y - x) = 3(x - y) - 5x[-(x - y)]$

$= 3(x - y) + 5x(x - y) = (x - y)(3 + 5x)$.

2. Giải phương trình:

a) $3x^2 - 6x = 0$; b) $2x(x - 3) + 5(x - 3) = 0$.

Giải

Hướng dẫn: $A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$

a) Ta có: $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 0$ hoặc $x = 2$

b) $2x(x - 3) + 5(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ 2x + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\frac{5}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 3$ hoặc $x = -\frac{5}{2}$.

B. Bài tập căn bản

39. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $3x - 6y$; b) $\frac{2}{5}x^2 + 5x^3 + x^2y$;

c) $14x^2y - 21xy^2 + 28x^2y^2$; d) $\frac{2}{5}x(y - 1) - \frac{2}{5}y(y - 1)$

e) $10x(x - y) - 8y(y - x)$.

Giải

a) $3x - 6y = 3(x - 2y)$

b) $\frac{2}{5}x^2 + 5x^3 + x^2y = x^2(\frac{2}{5} + 5x + y)$

c) $14x^2y - 21xy^2 + 28x^2y^2 = 7xy(2x - 3y + 4xy)$

d) $\frac{2}{5}x(y - 1) - \frac{2}{5}y(y - 1) = \frac{2}{5}(y - 1)(x - y)$

e) $10x(x - y) - 8y(y - x) = 10x(x - y) + 8y(x - y) = 2(x - y)(5x + 4y)$

40 Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $15.91,5 + 150.0,85$;

b) $x(x - 1) - y(1 - x)$ tại $x = 2001$ và $y = 1999$.

Giải

a) $15.91,5 + 150.0,85 = 15.91,5 + 15.10.0,85$

$= 15.91,5 + 15.8,5 = 15(91,5 + 8,5) = 15.100 = 1500$

b) $x(x - 1) - y(1 - x)$ tại $x = 2001$ và $y = 1999$

$x(x - 1) + y(x - 1) = (x - 1)(x + y) = (2001 - 1)(2001 + 1999)$

$= 2000.4000 = 8\ 000\ 000$.

41. Tìm x, biết:

a) $5x(x - 2000) - x + 2000 = 0$; b) $x^3 - 13x = 0$.

Giải

a) $5x(x - 2000) - x + 2000 = 0 \Leftrightarrow 5x(x - 2000) - (x - 2000) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2000)(5x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2000 = 0 \\ 5x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2000 \\ x = \frac{1}{5} \end{array}\right.$

Vậy $x = \frac{1}{5}$ hoặc $x = 2000$.

b) $x^3 - 13x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 13) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 13 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{13} \end{array}\right.$

Vậy $x = 0$ hoặc $x = \pm\sqrt{13}$.

42. Chứng minh rằng: $55^{n+1} - 55^n$ chia hết cho 54 (với n là số tự nhiên).

Giải

Ta có: $55^{n+1} - 55^n = 55^n.55 - 55^n = 55^n(55 - 1)$

$55^n.54 \vdots 54$ (với $n \in N$).

§7. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP DÙNG HẰNG ĐẲNG THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Về áp dụng phương pháp *dùng hằng đẳng thức* cần lưu ý:

– Trước tiên phải nhận xét xem các hạng tử của đa thức có chứa nhân tử chung không? Nếu có thì áp dụng phương pháp *đặt thành nhân tử chung*.

– Nếu không áp dụng được phương pháp đặt thành nhân tử chung thì xem có thể áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ để phân tích đa thức thành nhân tử hay không?

– Chú ý: Đôi khi phải đổi dấu mới áp dụng được hằng đẳng thức.

Ví dụ: $-x^4y^2 - 8x^2y - 16 = -(x^4y^2 + 8x^2y + 16) = -(x^2y + 4)^2$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $x^2 - 4x + 4$; b) $1 - 8x^3$; c) $-4x^2 + 4x - 1$.

Giải

a) $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2.x.2 + 2^2 = (x - 2)^2$

b) $1 - 8x^3 = (1)^3 - (2x)^3 = (1 - 2x)[1^2 + 1.2x + (2x)^2] = (1 - 2x)(1 + 2x + 4x^2)$

c) $-4x^2 + 4x - 1 = -(4x^2 - 4x + 1) = -[(2x)^2 - 2.2x.1 + 1^2] = -(2x - 1)^2$

2. a) Tính nhanh $105^2 - 25$.

b) Hiệu các bình phương của hai số tự nhiên liên tiếp bằng 11. Tìm hai số ấy.

Giải

a) Tính nhanh: $105^2 - 25$

Ta có: $105^2 - 25 = 105^2 - 5^2 = (105 + 5)(105 - 5) = 110.100 = 11000$

b) Gọi hai số tự nhiên liên tiếp cần tìm là n và n + 1.

Theo đề bài, ta có: $(n + 1)^2 - n^2 = 11 \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 - n^2 = 11$

$\Leftrightarrow 2n + 1 = 11 \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5$

Vậy hai số phải tìm là 5 và 6.

B. Bài tập căn bản

43. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 + 6x + 9$; b) $10x - 25 - x^2$; c) $8x^3 - \frac{1}{8}$; d) $\frac{1}{25}x^2 - 64y^2$.

Giải

a) $x^2 + 6x + 9 = (x)^2 + 2.x.3 + 3^2 = (x + 3)^2$

b) $10x - 25 - x^2 = -(x^2 - 10x + 25) = -(x^2 - 2.x.5 + 5^2) = -(x - 5)^2$

c) $8x^3 - \frac{1}{8} = (2x)^3 - (\frac{1}{2})^3 = (2x - \frac{1}{2})[(2x)^2 + 2x.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}]$

$$= (2x - \frac{1}{2})(4x^2 + x + \frac{1}{4})$$

d) $\frac{1}{25}x^2 - 64y^2 = (\frac{1}{5}x)^2 - (8y)^2 = (\frac{1}{5}x + 8y)(\frac{1}{5}x - 8y)$

44. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 + \frac{1}{27}$;

b) $(a + b)^3 - (a - b)^3$;

c) $(a + b)^3 + (a - b)^3$;

d) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$;

e) $-x^3 + 9x^2 - 27x + 27$.

Giải

a) $x^3 + \frac{1}{27} = x^3 + (\frac{1}{3})^3 = (x + \frac{1}{3})(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{9})$

b) $(a + b)^3 - (a - b)^3 = [(a + b) - (a - b)][(a + b)^2 + (a + b)(a - b) + (a - b)^2]$

$= (a + b - a + b)(a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - b^2 + a^2 - 2ab + b^2) = 2b(3a^2 + b^2)$.

c) $(a + b)^3 + (a - b)^3 = [(a + b) + (a - b)][(a + b)^2 - (a + b)(a - b) + (a - b)^2]$

$= (a + b + a - b)(a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + b^2 + a^2 - 2ab + b^2) = 2a(a^2 + 3b^2)$.

d) $8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2.y + 3(2x)y^2 + (y)^3 = (2x + y)^3$

e) $-x^3 + 9x^2 - 27x + 27 = -(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)$

$$= -[(x)^3 - 3x^2.3 + 3.x.3^2 - 3^3] = -(x - 3)^3 = (3 - x)^3$$

45. Tìm x, biết:

a) $2 - 25x^2 = 0$;

b) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$.

Giải

a) $2 - 25x^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2})^2 - (5x)^2 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2} + 5x)(\sqrt{2} - 5x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2} + 5x = 0 \\ \sqrt{2} - 5x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\sqrt{2}}{5} \\ x = +\frac{\sqrt{2}}{5} \end{array}\right.$$

Vậy $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{5}$.

b) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Vậy $x = \frac{1}{2}$.

46. Tính nhanh:

a) $73^2 - 27^2$; b) $37^2 - 13^2$; c) $2002^2 - 2^2$

Giải

a) $73^2 - 27^2 = (73 + 27)(73 - 27) = 100.46 = 4600$

b) $37^2 - 13^2 = (37 + 13)(37 - 13) = 50.24 = 1200$

c) $2002^2 - 2^2 = (2002 + 2)(2002 - 2) = 2004.2000 = 4\ 008\ 000$

§8. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG PHƯƠNG PHÁP NHÓM HẠNG TỬ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Phương pháp chung*:

- Trước hết ta nhận xét rằng đa thức đó không thể phân tích thành nhân tử bằng phương pháp đặt thành nhân tử chung (PP1), dùng hằng đẳng thức đáng nhớ (PP2). Khi đó ta nghĩ đến phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp nhóm hạng tử (PP3).
- Ta nhận xét để tìm cách nhóm các hạng tử một cách thích hợp (có thể giao hoán các hạng tử để nhóm) sao cho sau khi nhóm từng nhóm đa thức có thể phân tích được thành nhân tử bằng PP1, PP2 và khi đó đa thức mới phải xuất hiện nhân tử chung.
- Ta áp dụng phương pháp đặt thành nhân tử chung để phân tích đa thức đã cho thành nhân tử.

Ví dụ: Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $2xy + 3z + 6y + xz$

B1: Ta nhận thấy rằng đa thức không thể phân tích bằng PP1 hoặc PP2. Ta nghĩ đến dùng PP3.

B2: Ta thấy rằng cần giao hoán các hạng tử để có cách nhóm thích hợp. Đó là:

$2xy + 3z + 6y + zx = 2xy + 6y + 3z + xz$

$= (2xy + 6y) + (3z + xz) = 2y(x + 3) + z(x + 3) = (x + 3)(2y + z)$

2. *Chú ý:*

- Đối với một đa thức ta có thể có nhiều cách nhóm các hạng tử một cách thích hợp.
- Khi phân tích đa thức thành nhân tử ta phải phân tích đến cuối cùng (đến khi nào không thể còn phân tích được nữa).
- Dù phân tích bằng cách nào thì kết quả cũng là duy nhất.
- Khi nhóm các hạng tử thì phải chú ý dấu của đa thức.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Phân tích các đa thức sau đây thành nhân tử:

a) $xy - 5y + 2x - 10$; b) $2xy + z + 2x + yz$; c) $x^2 + 2x + 1 - y^2$.

Giải

a) $xy - 5y + 2x - 10 = (xy - 5y) + (2x - 10)$
$= y(x - 5) + 2(x - 5) = (x - 5)(y + 2)$

b) $2xy + z + 2x + yz = (2xy + 2x) + (z + yz)$
$= 2x(y + 1) + z(y + 1) = (y + 1)(2x + z)$

c) $x^2 + 2x + 1 - y^2 = (x^2 + 2x + 1) - y^2$
$= (x + 1)^2 - y^2 = (x + 1 + y)(x + 1 - y)$.

2. Tìm y, biết: $y(y - 4) + y - 4 = 0$.

Giải

Ta có: $y(y - 4) + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y(y - 4) + (y - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (y - 4)(y + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - 4 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4 \\ y = -1 \end{array}\right.$

Vậy $y = 4$ hoặc $y = -1$.

B. Bài tập căn bản

47. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - xy + x - y$; b) $xz + yz - 5(x + y)$;

c) $3x^2 - 3xy - 5x + 5y$.

Giải

a) $x^2 - xy + x - y = (x^2 - xy) + (x - y) = x(x - y) + (x - y) = (x - y)(x + 1)$

b) $xz + yz - 5(x + y) = (xz + yz) - 5(x + y)$
$= z(x + y) - 5(x + y) = (x + y)(z - 5)$

c) $3x^2 - 3xy - 5x + 5y = (3x^2 - 3xy) - (5x - 5y)$
$= 3x(x - y) - 5(x - y) = (x - y)(3x - 5)$

48. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 + 4x - y^2 + 4$; b) $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 3z^2$;

c) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2$.

Giải

a) $x^2 + 4x - y^2 + 4 = (x^2 + 4x + 4) - y^2$

$= (x + 2)^2 - y^2 = (x + 2 + y)(x + 2 - y)$

b) $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 3z^2 = 3(x^2 + 2xy + y^2 - z^2) = 3[(x^2 + 2xy + y^2) - z^2]$

$= 3[(x + y)^2 - z^2] = 3(x + y + z)(x + y - z)$

c) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2 + 2zt - t^2 = (x^2 - 2xy + y^2) - (z^2 - 2zt + t^2)$

$= (x - y)^2 - (z - t)^2 = [(x - y) + (z - t)][(x - y) - (z - t)]$

$= (x - y + z - t)(x - y - z + t)$.

49. Tính nhanh: a) $37,5.6,5 - 7,5.3,4 - 6,6.7,5 + 3,5.37,5$

b) $45^2 + 40^2 - 15^2 + 80.45$

Giải

a) $37,5.6,5 - 7,5.3,4 - 6,6.7,5 + 3,5.37,5 = (37,5.6,5 + 3,5.37,5) - (7,5.3,4 + 6,6.7,5)$

$= 37,5(6,5 + 3,5) - 7,5(3,4 + 6,6) = 37,5.10 - 7,5.10$

$= 10(37,5 - 7,5) = 10.30 = 300$

b) $45^2 + 40^2 - 15^2 + 80.45 = (40^2 + 80.45 + 45^2) - 15^2$

$= (40^2 + 2.40.45 + 45^2) - 15^2 = (40 + 45)^2 - 15^2 = 85^2 - 15^2$

$= (85 + 15)(85 - 15) = 100.70 = 7000$

50. Tìm x, biết:

a) $x(x - 2) + x - 2 = 0$; b) $5x(x - 3) - x + 3 = 0$.

Giải

a) $x(x - 2) + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) + (x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$

Vậy $x = 2$ hoặc $x = -1$.

b) $5x(x - 3) - x + 3 = 0 \Leftrightarrow 5x(x - 3) - (x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(5x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ 5x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{1}{5} \end{array}\right.$

Vậy $x = 3$ hoặc $x = \frac{1}{5}$.

§9. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG CÁCH PHỐI HỢP NHIỀU PHƯƠNG PHÁP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Phương pháp chung:* Ta đi tìm hướng giải bài toán bằng cách đọc kỹ đề ta rút ra nhận xét, có thể:

 Đặt nhân tử chung.

 Hoặc dùng hằng đẳng thức.

 Hoặc nhóm nhiều hạng tử.

 Hoặc có thể phối hợp các phương pháp trên để phân tích đa thức thành nhân tử.

Ví dụ: Phân tích đa thức thành nhân tử:

$x^2 - 2xy + y^2 - 4 = (x^2 - 2xy + y^2) - 4$

$= (x - y)^2 - 2^2 = (x - y + 2)(x - y - 2)$

2. *Chú ý:* Nếu các hạng tử của đa thức có nhân tử chung, ta nên đặt nhân tử chung ra ngoài dấu ngoặc ( ) để đa thức trong ( ) đơn giản hơn rồi mới tiếp tục phân tích đến cuối cùng khi không còn phân tích được nữa.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Phân tích đa thức thành nhân tử:

a) $3xy^2 - 12xy + 12x$; b) $x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz$;

c) $4x^4 - x^3 + 4x^2 - x$.

Giải

a) $3xy^2 - 12xy + 12x = 3x(y^2 - 4y + 4) = 3x(y - 2)^2$

b) $x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz = (x^2 + 2xy + y^2) - (xz + yz)$

$= (x + y)^2 - z(x + y) = (x + y)(x + y - z)$.

c) $4x^4 - x^3 + 4x^2 - x = x(4x^3 - x^2 + 4x - 1) = x[(4x^3 - x^2) + (4x - 1)]$

$= x[x^2(4x - 1) + (4x - 1)] = x(4x - 1)(x^2 + 1)$.

2. Tìm x, biết: $(2x - 3)^2 - (x + 5)^2 = 0$.

Giải

Ta có: $(2x - 3)^2 - (x + 5)^2 = 0 \Leftrightarrow [(2x - 3) + (x + 5)][(2x - 3) - (x + 5)] = 0$

$\Leftrightarrow (2x - 3 + x + 5)(2x - 3 - x - 5) = 0$

$\Leftrightarrow (3x + 2)(x - 8) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + 2 = 0 \\ x - 8 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3} \\ x = 8 \end{array}\right.$

Vậy $x = 8$ hoặc $x = -\frac{2}{3}$.

B. Bài tập căn bản

51. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 - 2x^2 + x$; b) $2x^2 + 4x + 2 - 2y^2$; c) $2xy - x^2 - y^2 + 16$.

Giải

a) $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$

b) $2x^2 + 4x + 2 - 2y^2 = 2(x^2 + 2x + 1 - y^2) = 2[(x^2 + 2x + 1) - y^2]$
$= 2[(x + 1)^2 - y^2] = 2(x + 1 + y)(x + 1 - y)$

c) $2xy - x^2 - y^2 + 16 = -(x^2 - 2xy + y^2 - 16) = -[(x^2 - 2xy + y^2) - 16]$
$= -[(x - y)^2 - 4^2] = -(x - y + 4)(x - y - 4)$
$= (4 - x + y)(4 + x - y)$

52. Chứng minh rằng $(5n + 2)^2 - 4$ chia hết cho 5 với mọi số nguyên n.

Giải

Ta có: $(5n + 2)^2 - 4 = (5n)^2 + 2.(5n).2 + 2^2 - 4 = 25n^2 + 20n + 4 - 4$
$= 25n^2 + 20n = 5n(5n + 4) \vdots 5$ (đpcm)

53. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 3x + 2$

Gợi ý: Ta không thể áp dụng ngay các phương pháp đã học để phân tích nhưng nếu tách hạng tử $-3x = -x - 2x$ thì ta có $x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2$ và có thể dễ dàng phân tích tiếp.

Cũng có thể tách $2 = -4 + 6$ ta có $x^2 - 3x + 2 = x^2 - 4 - 3x + 6$, từ đây dễ dàng phân tích tiếp.

b) $x^2 + x - 6$;

c) $x^2 + 5x + 6$.

Giải

a) Theo gợi ý của bài này, trong toán học đây gọi là phương pháp "Tách một hạng tử thành nhiều hạng tử". Chúng ta sẽ xem thêm trong phần "Phân tích đa thức thành nhân tử bằng vài phương pháp khác".

Ta có: $x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1)$.

b) $x^2 + \underbrace{x}_{-2x + 3x} - 6 = x^2 - 2x + 3x - 6$
$= (x^2 - 2x) + (3x - 6) = x(x - 2) + 3(x - 2)$
$= (x - 2)(x + 3)$

c) $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = (x^2 + 2x) + (3x + 6)$
$= x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3)$.

Luyện tập

54. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^3 + 2x^2y + xy^2 - 9x$; b) $2x - 2y - x^2 + 2xy - y^2$; c) $x^4 - 2x^2$.

Giải

Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a) $x^3 + 2x^2y + xy^2 - 9x = x(x^2 + 2xy + y^2 - 9)$

$= x[(x^2 + 2xy + y^2) - 9] = x[(x + y)^2 - 3^2]$

$= x(x + y + 3)(x + y - 3)$

b) $2x - 2y - x^2 + 2xy - y^2 = (2x - 2y) - (x^2 - 2xy + y^2)$

$= 2(x - y) - (x - y)^2 = (x - y)[2 - (x - y)]$

$= (x - y)(2 - x + y)$.

c) $x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$.

55. Tìm x biết:

a) $x^3 - \frac{1}{4}x = 0$; b) $(2x - 1)^2 - (x + 3)^2 = 0$; c) $x^2(x - 3) + 12 - 4x = 0$.

Giải

Hướng dẫn: $A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$

a) $x^3 - \frac{1}{4}x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - \frac{1}{4}) = 0 \Leftrightarrow x[x^2 - (\frac{1}{2})^2] = 0$

$\Leftrightarrow x(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x + \frac{1}{2} = 0 \\ x - \frac{1}{2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy $x = -\frac{1}{2}$ hoặc $x = 0$ hoặc $x = \frac{1}{2}$.

b) $(2x - 1)^2 - (x + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow [(2x - 1) + (x + 3)][(2x - 1) - (x + 3)] = 0$

$\Leftrightarrow (3x + 2)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + 2 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{2}{3} \\ x = 4 \end{array}\right.$

Vậy $x = -\frac{2}{3}$ hoặc $x = 4$.

c) $x^2(x - 3) + 12 - 4x = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 3) - 4(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (x - 3)(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Vậy $x = -2$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = 3$.

56. Tính nhanh giá trị của đa thức: a) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}$ tại $x = 49,75$

b) $x^2 - y^2 - 2y - 1$ với $x = 93$ và $y = 6$.

Giải

Ta thu gọn đa thức trước khi thay số vào để tính:

a) Với $x = 49,75$, ta có: $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = x^2 + 2.x.\frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2 = (x + \frac{1}{4})^2$

$= (49,75 + 0,25)^2 = 50^2 = 2500$

b) Với $x = 93$; $y = 6$, ta có:

$x^2 - y^2 - 2y - 1 = x^2 - (y^2 + 2y + 1) = x^2 - (y + 1)^2$

$= (x + y + 1)(x - y - 1) = (93 + 6 + 1)(93 - 6 - 1) = 100.86 = 8600.$

57. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 4x + 3$; b) $x^2 + 5x + 4$; c) $x^2 - x - 6$;

d) $x^4 + 4$ (Gợi ý câu d): thêm và bớt $4x^2$ vào đa thức đã cho).

Giải

Áp dụng phương pháp tách hạng tử thành nhiều hạng tử.

a) $x^2 \underbrace{- 4x}_{-3x - x} + 3 = x^2 - 3x - x + 3 = (x^2 - 3x) - (x - 3)$

$= x(x - 3) - (x - 3) = (x - 3)(x - 1)$

b) $x^2 + \underbrace{5x}_{x + 4x} + 4 = x^2 + x + 4x + 4 = (x^2 + x) + (4x + 4)$

$= x(x + 1) + 4(x + 1) = (x + 1)(x + 4)$

c) $x^2 - x \underbrace{- 6}_{-4 - 2} = x^2 - 4 - x - 2 = (x^2 - 4) - (x + 2)$

$= (x + 2)(x - 2) - (x + 2) = (x + 2)(x - 2 - 1) = (x + 2)(x - 3)$

d) $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$

58. Chứng minh rằng $n^3 - n$ chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.

Giải

Ta có: $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n + 1)(n - 1) = (n - 1).n.(n + 1)$ với $n \in \mathbb{Z}$.

Nhận xét: Với $n \in \mathbb{Z}$ thì $n - 1$, n, $n + 1$ là ba số nguyên liên tiếp nên tích chia hết cho 2 và tích cũng chia hết cho 3 mà $(2.3) = 6$ nên tích $(n - 1).n.(n + 1) \vdots 6$ (đpcm).

PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ BẰNG VÀI PHƯƠNG PHÁP KHÁC

Ngoài bốn phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử vừa học:

- Đặt nhân tử chung.
- Dùng hằng đẳng thức.
- Nhóm hạng tử.
- Phối hợp ba phương pháp trên.

Ta cũng có vài phương pháp thường gặp khác (thường dành cho học sinh khá và giỏi) để phân tích đa thức thành nhân tử.

1. Phương pháp: Tách một hạng tử thành nhiều hạng tử.

Ví dụ: a) Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2 + 5x + 6$

b) Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^2 - x - 6$

Giải

a) Khi ta không thể áp dụng các phương pháp thông thường ở trên thì ta nghĩ đến dùng phương pháp này.

Ta tách số hạng $5x = 2x + 3x$. Khi đó:

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = (x^2 + 2x) + (3x + 6)$$
$$= x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3).$$

b) * *Cách 1:* Ta tách hạng tử $-x = -3x + 2x$.

Khi đó: $x^2 - x - 6 = x^2 - 3x + 2x - 6 = (x^2 - 3x) + (2x - 6)$

$= x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(x + 2).$

* *Cách 2:* Ta cũng có thể tách hạng tử $-6 = -2 - 4$

Khi đó: $x^2 - x - 6 = x^2 - x - 2 - 4 = (x^2 - 4) - (x + 2)$

$= (x + 2)(x - 2) - (x + 2) = (x + 2)[(x - 2) - 1]$

$= (x + 2)(x - 3).$

2. Phương pháp: Thêm bớt cùng một hạng tử vào đa thức.

Ví dụ: Phân tích đa thức thành nhân tử: $x^4 + 4$

Giải

Hướng dẫn: Ta không thể áp dụng các phương pháp đã học. Song nếu viết $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$, tức là "thêm" và "bớt" cùng hạng tử $4x^2$ vào đa thức đã cho thì có thể áp dụng các phương pháp đã học để phân tích đa thức đã cho thành nhân tử.

Thật vậy, $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2$

$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x).$

- **Bài tập**

Phân tích đa thức thành nhân tử:

1. a) $x^2 - 7xy + 10y^2$; b) $5x^2 + 6xy + y^2$;

c) $x^2 - 5x - 14$; d) $x^2 + 2x - 15$.

2. a) $2x^2 + 10x + 8$; b) $x^3 - 9x^2 + 14x$;

3. a) $x^4 + 64$; b) $x^4 + 4y^4$.

- **Bài tập nâng cao**

1. Hãy phân tích đa thức $x^2 - x - 6$ thành nhân tử bằng nhiều cách khác nhau.

Giải

* Cách 1:

$$x^2 - x - 6 = x^2 - 4 - x - 2 = (x - 2)(x + 2) - (x + 2) = (x + 2)(x - 3)$$

* Cách 2:

$$x^2 - x - 6 = x^2 - 9 - x + 3 = (x - 3)(x + 3) - (x - 3) = (x - 3)(x + 2)$$

* Cách 3:

$$x^2 - x - 6 = x^2 + 2x - 3x - 6 = x(x + 2) - 3(x + 2) = (x + 2)(x - 3)$$

* Cách 4:

$$x^2 - x - 6 = x^2 - 3x + 2x - 6 = x(x - 3) + 2(x - 3) = (x - 3)(x + 2)$$

* Cách 5:

$$x^2 - x - 6 = x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{25}{4} = (x - \frac{1}{2})^2 - (\frac{5}{2})^2 = (x - 3)(x + 2).$$

* Cách 6:

$$x^2 - x - 6 = x^2 + (-3 - 2)x + (-3).2 = (x - 3)(x + 2).$$

Tổng quát: $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

* Cách 7: (Phương pháp hệ số bất định)

Giả sử $x^2 - x - 6 = (x + a)(x + b) \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = x^2 + (a + b)x + ab$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ ab = -6 \end{cases} \text{chọn } a = -3, b = 2$$

2. Phân tích thành nhân tử:

a) $16x^4 + 4$; b) $x^5 + x + 1$; c) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$.

Giải

a) $16x^4 + 4 = (4x^2)^2 + 2^2 + 2.4.x^2.2 - 16x^2$

$= (4x^2 + 2)^2 - (4x)^2 = (4x^2 - 4x + 2)(4x^2 + 4x + 2)$

b) $x^5 + x + 1 = x^5 - x^2 + x^2 + x + 1 = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)$

$= x^2(x - 1) + (x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$

$= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

c) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = a(b^2 - c^2) + b(c^2 - b^2 + b^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

$= a(b^2 - c^2) - b(b^2 - c^2) - b(a^2 - b^2) + c(a^2 - b^2)$

$= (b^2 - c^2)(a - b) + (a^2 - b^2)(c - b)$

$= (b - c)(b + c)(a - b) - (a - b)(a + b)(b - c)$

$= (a - b)(b - c)(c - a)$

3. Cho a, b, c ∈ Q thỏa $ab + ac + bc = 1$.

Chứng minh rằng: $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$ là bình phương của một số hữu tỉ.

Giải

Ta có:

* $1 + a^2 = ab + ac + bc + a^2 = a(a + b) + c(a + b) = (a + b)(a + c)$
* $1 + b^2 = ab + ac + bc + b^2 = b(a + b) + c(a + b) = (a + b)(b + c)$
* $1 + c^2 = ab + ac + bc + c^2 = a(b + c) + c(b + c) = (b + c)(a + c)$

Suy ra: $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) = (a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2$ là bình phương của số hữu tỉ.

4. a) Phân tích thành nhân tử: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

b) Chứng minh rằng nếu $x^2 - yz = a$, $y^2 - zx = b$, $z^2 - xy = c$ $(x, y, z \in Z)$ thì $ax + by + cz$ chia hết cho $a + b + c$.

Giải

a) Ta có: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

b) Ta có: $ax + by + cz = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

Tích này chia hết cho $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = a + b + c$.

5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình:

a) $x + y = xy$;　　　　b) $5xy - 2y^2 - 2x^2 = -2$

Giải

a) Ta có: $x + y = xy \Leftrightarrow xy - x - y = 0 \Leftrightarrow x(y - 1) - (y - 1) = 1$

$\Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = 1 = 1.1 = (-1).(-1)$

Ta có hệ : $\begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 1 = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - 1 = -1 \\ y - 1 = -1 \end{cases}$

Vậy $(x, y) = (2, 2)$ hoặc $(x, y) = (0, 0)$

b) Hướng dẫn:

Ta có: $5xy - 2y^2 - 2x^2 = -2 \Leftrightarrow (2x - y)(x - 2y) = 2 = 2.1 = 1.2 = (-1).(-2)$

6. Giải phương trình $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$.

Giải

Ta có: $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(x^3 + 1) - (x^2 - 1) - 5(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x + 1)(x - 1) - 5(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x + 1)(2x^2 - 2x + 2 - x + 1 - 5) = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x + 1)[(2x^2 - 3x - 2)] = 0 \Leftrightarrow (x + 1)[(2x^2 - 4x) + (x - 2)] = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 1)(x - 2)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{-1; -\frac{1}{2}; 2\}$.

7. Chứng minh rằng với n lẻ thì: a) $n^2 + 4n + 3$ chia hết cho 8.

b) $n^3 + 3n^2 - n - 3$ chia hết cho 48.

Hướng dẫn

a) $n^2 + 4n + 3 = (n + 1)(n + 3)$

Với $n = 2k + 1 : (n + 1)(n + 3) = 4(k + 1)(k + 2)$

b) $n^3 + 3n^2 - n - 3 = (n - 1)(n + 1)(n + 3)$.

§10. CHIA ĐƠN THỨC CHO ĐƠN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Giả sử A và B là hai đơn thức, $B \neq 0$

Ta nói A chia hết cho B nếu tìm được một đơn thức Q sao cho $A = B.Q$

Ký hiệu: $Q = A : B$ hoặc $Q = \frac{A}{B}$.

2. Quy tắc:

a) Trường hợp hai đơn thức là hai lũy thừa của cùng một biến:

$$x^m : x^n = x^{m-n}$$

b) Trường hợp tổng quát: Muốn chia đơn thức A cho đơn thức B (Trường hợp A chia hết cho B) ta làm như sau:

- Chia hệ số của đơn thức A cho hệ số của đơn thức B.
- Chia từng lũy thừa của biến trong A cho lũy thừa của cùng biến đó trong B.
- Nhân các kết quả tìm được với nhau.

Ví du: Thực hiện phép tính:

a) $15x^3y^2z : (-3x^2y^2) = \frac{15}{-3}.\frac{x^3}{x^2}.\frac{y^2}{y^2}.\frac{z}{1} = -5xz$

b) $4x^4y^3z^2 : 5x^4y^2 = \frac{4}{5}.\frac{x^4}{x^4}.\frac{y^3}{y^2}.\frac{z^2}{1} = \frac{4}{5}yz^2$.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Tính: a) $15x^7 : 3x^2$; b) $20x^5 : 12x$;
c) $15x^2y^2 : 5xy^2$; d) $15x^3y^5 : 5x^2y^3$.

Giải

a) $15x^7 : 3x^2 = \frac{15}{3}.\frac{x^7}{x^2} = 5.x^{7-2} = 5x^5$

b) $20x^5 : 12x = \frac{20}{12}.\frac{x^5}{x} = \frac{5}{3}x^{5-1} = \frac{5}{3}x^4$

c) $15x^2y^2 : 5xy^2 = \frac{15}{5}.\frac{x^2}{x}.\frac{y^2}{y^2} = 3x.1 = 3x$

d) $15x^3y^5 : 5x^2y^3 = \frac{15}{5}.\frac{x^3}{x^2}.\frac{y^5}{y^3} = 3xy^2$.

2. Cho $P = 12x^4y^2 : (-9xy^2)$. Tính giá trị của biểu thức P với $x = -3$.

Giải

Ta thu gọn P trước rồi thay giá trị của x và y vào biểu thức thu gọn để tính giá trị của biểu thức P.

Ta có:

$$P = 12x^4y^2 : (-9xy^2) = \frac{12}{-9}.\frac{x^4}{x}.\frac{y^2}{y^2} = -\frac{4}{3}.x^3 = -\frac{4}{3}.(-3)^3 = -\frac{4}{3}.(-27) = 36$$

Vậy $P = 36$.

B. Bài tập căn bản

59 Làm tính chia:

a) $5^3 : (-5)^2$; b) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 : \left(\frac{3}{4}\right)^3$; c) $(-12)^3 : 8^3$.

Giải

a) $5^3 : (-5)^2 = 5^3 : 5^2 = 5$; b) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

c) $(-12)^3 : 8^3 = \left(-\frac{12}{8}\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$

60. Làm tính chia:

a) $x^{10} : (-x)^8$; b) $(-x)^5 : (-x)^3$; c) $(-y)^5 : (-y)^4$.

Giải

a) $x^{10} : (-x)^8 = x^{10} : x^8 = x^2$;

b) $(-x)^5 : (-x)^3 = (-x)^{5-3} = (-x)^2 = x^2$;

c) $(-y)^5 : (-y)^4 = (-y)^{5-4} = -y$.

61. Làm tính chia:

a) $5x^2y^4 : 10x^2y$; b) $\frac{3}{4}x^3y^3 : (-\frac{1}{2}x^2y^2)$; c) $(-xy)^{10} : (-xy)^5$.

Giải

a) $5x^2y^4 : 10x^2y = \frac{5}{10}.\frac{x^2}{x^2}.\frac{y^4}{y} = \frac{1}{2}y^3$

b) $\frac{3}{4}x^3y^3 : \left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right) = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}}.\frac{x^3}{x^2}.\frac{y^3}{y^2} = -\frac{3}{2}xy$

c) $(-xy)^{10} : (-xy)^5 = (-xy)^{10-5} = (-xy)^5 = -x^5y^5$.

62. Tính giá trị của biểu thức sau: $15x^4y^3z^2 : 5xy^2z^2$ tại $x = 2$; $y = -10$ và $z = 2004$.

Giải

Đặt $P = 15x^4y^3z^2 : 5xy^2z^2 = \frac{15}{5}.\frac{x^4}{x}.\frac{y^3}{y^2}.\frac{z^2}{z^2} = 3x^3y = 3.2^3.(-10) = 3.8(-10) = -240$

Vậy $P = -240$.

§11. CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Quy tắc: Đa thức A và đơn thức B ($B \neq 0$)

Muốn chia đa thức A cho đơn thức B, ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả lại với nhau.

Ví dụ: $(15x^2y^5 + 12x^3y^2 - 10xy^3) : 3xy^2 = \frac{15x^2y^5}{3xy^2} + \frac{12x^3y^2}{3xy^2} - \frac{10xy^3}{3xy^2}$

$= 5xy^3 + 4x^2 - \frac{10}{3}y.$

2. Chú ý: Trong trường hợp đa thức A có thể phân tích thành nhân tử, thường ta phân tích trước để rút gọn cho nhanh.

Ví dụ: $(4x^4 - 8x^2y^2) : (-4x^2) = \frac{4x^2(x^2 - 2y^2)}{-4x^2} = -(x^2 - 2y^2) = 2y^2 - x^2$.

– Trong thực hành có thể bỏ bớt một số phép tính trung gian, chẳng hạn:

$(5x^3y^5 - 3x^4y^4 + 2x^5y^3) : (-3x^2y^3) = -\frac{5}{3}xy^2 + x^2y - \frac{2}{3}x^3$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Làm tính chia: $(18x^4y^3 - 24x^3y^4 + 6x^2y^5) : 6x^2y^3$.

Giải

$$(18x^4y^3 - 24x^3y^4 + 6x^2y^5) : 6x^2y^3 = \frac{18x^4y^3}{6x^2y^3} - \frac{24x^3y^4}{6x^2y^3} + \frac{6x^2y^5}{6x^2y^3} = 3x^2 - 4xy + y^2.$$

2. Làm tính chia: $(15x^3y^2 - 5x^2y^3 + 10xy^4) : 5xy^2$.

Giải

Nhận xét: Ta thấy rằng đa thức ở tử có thể đặt $5xy^2$ làm nhân tử chung, ta đặt nhân tử chung để rút gọn cho nhanh, thật vậy:

$$(15x^3y^2 - 5x^2y^3 + 10xy^4) : 5xy^2 = 5xy^2(3x^2 - xy + 2y^2) : 5xy^2 = 3x^2 - xy + 2y^2$$

B. Bài tập căn bản

63. Không làm tính chia, hãy xét xem đa thức A có chia hết cho đơn thức B không:

$$A = 15xy^2 + 17xy^3 + 18y^2$$
$$B = 6y^2.$$

Giải

Nhận xét: Ta biết rằng đa thức A chia hết cho đơn thức B khi và chỉ khi mỗi hạng tử của A (phần chữ) đều chia hết cho đơn thức B.

Vì vậy: Đa thức A có thể đặt y^2 làm nhân tử chung, ta có thể rút gọn cho đơn thức $B = 6y^2$.

Vậy đa thức A chia hết cho đơn thức B.

64. Làm tính chia:

a) $(-2x^5 + 3x^2 - 4x^3) : 2x^2$; b) $(x^3 - 2x^2y + 3xy^2) : (-\frac{1}{2}x)$

c) $(3x^2y^2 + 6x^2y^3 - 12xy) : 3xy$.

Giải

a) $(-2x^5 + 3x^2 - 4x^3) : 2x^2 = \dfrac{x^2(-2x^3 + 3 - 4x)}{2x^2} = \dfrac{-2x^3 + 3 - 4x}{2} = -x^3 - 2x + \dfrac{3}{2}$

b) $(x^3 - 2x^2y + 3xy^2) : (-\frac{1}{2}x) = \dfrac{x(x^2 - 2xy + 3y^2)}{-\frac{1}{2}x} = \dfrac{x^2 - 2xy + 3y^2}{-\frac{1}{2}}$

$= -2(x^2 - 2xy + 3y^2) = -2x^2 + 4xy - 6y^2$

c) $(3x^2y^2 + 6x^2y^3 - 12xy) : 3xy = \dfrac{3xy(xy + 2xy^2 - 4)}{3xy} = xy + 2xy^2 - 4.$

65. Làm tính chia: $[3(x - y)^4 + 2(x - y)^3 - 5(x - y)^2] : (y - x)^2$.

(Gợi ý: Có thể đặt $x - y = z$ rồi áp dụng quy tắc chia đa thức cho đơn thức).

Giải

Do $(x - y)^2 = (y - x)^2$, ta có:

$$[3(x - y)^4 + 2(x - y)^3 - 5(x - y)^2] : (y - x)^2 = \frac{(x - y)^2[3(x - y)^2 + 2(x - y) - 5]}{(x - y)^2}$$

$$= 3(x - y)^2 + 2(x - y) - 5 = 3(x^2 - 2xy + y^2) + 2x - 2y - 5$$

$$= 3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x - 2y - 5.$$

66. Ai đúng, ai sai?

Khi giải bài tập: "Xét xem đa thức: $A = 5x^4 - 4x^3 + 6x^2y$ có chia hết cho đơn thức $B = 2x^2$ hay không?"

Hà trả lời: "A không chia hết cho B vì 5 không chia hết cho 2".

Quang trả lời: "A chia hết cho B vì mọi hạng tử của A đều chia hết cho B".

Cho biết ý kiến của em về lời giải của hai bạn?

Giải

Bạn Quang trả lời đúng vì đa thức A chia hết cho đơn thức B khi mỗi hạng tử (phần chữ) của A đều chia hết cho B.

Ta có: $(5x^4 - 4x^3 + 6x^2y) : 2x^2 = x^2(5x^2 - 4x + 6y) : 2x^2 = \frac{5}{2}x^2 - 2x + 3y$.

Vậy A chia hết cho B.

§12. CHIA ĐA THỨC MỘT BIẾN ĐÃ SẮP XẾP

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Phương pháp: Ta trình bày phép chia này tương tự cách chia số tự nhiên. Với hai đa thức tùy ý A và B của cùng một biến, $B \neq 0$, tồn tại duy nhất hai đa thức Q và R sao cho:

   $A = B.Q + R$ (trong đó $R = 0$ hoặc bậc của R bé hơn bậc của B).

   - Nếu $R = 0$: ta nói rằng đó là phép chia hết.
   - Nếu $R \neq 0$: ta nói rằng đó là phép chia có dư.

2. Chú ý:

   a) Định lý Bơ-du (Bézout): Cho đa thức bậc n của ẩn x:

   $$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 \ (a_n \neq 0).$$

   Số dư trong phép chia đa thức f(x) cho nhị thức bậc nhất $(x - a)$ bằng giá trị của đa thức f(x) tại $x = a$.

   b) Hệ quả: f(x) chia hết cho $(x - a) \Leftrightarrow f(a) = 0$

(f(a) là giá trị của đa thức f(x) tại x = a, với a là nghiệm của đa thức f(x)).

c) Ta chứng minh được rằng:

Trong đa thức $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ ($a_n \neq 0$), với a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 là các số nguyên, nghiệm hữu tỉ (nếu có) phải có dạng $\frac{p}{q}$, trong đó p là ước của hệ số tự do (p / a_0) và q là ước dương của hệ số của hạng tử cao nhất (q / a_n).

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Sắp xếp đa thức rồi làm tính chia: $(15 + 5x^2 - 3x^3 - 9x) : (5 - 3x)$.

Giải

Ta sắp xếp các đa thức theo lũy thừa giảm dần của x, rồi thực hiện phép chia như sau:

$$\begin{array}{rrrr|l} -3x^3 & +5x^2 & -9x & +15 & -3x+5 \\ \hline -3x^3 & +5x^2 & & & x^2+3 \\ \hline & & -9x & +15 & \\ & & -9x & +15 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Vậy $(-3x^3 + 5x^2 - 9x + 15) : (-3x + 5) = x^2 + 3$.

2. Cho A và B là hai đa thức. Hãy chia A cho B rồi viết A dưới dạng:

$$A = B.Q + R$$
$$A = 2x^3 - x^2 - x + 1;\ B = x^2 - 2x.$$

Giải

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -x^2 & -x & +1 & x^2-2x \\ \hline 2x^3 & -4x^2 & & & 2x+3 \\ \hline & 3x^2 & -x & +1 & \\ & 3x^2 & -6x & & \\ \hline & & 5x & +1 & \end{array}$$

Vậy: $2x^3 - x^2 - x + 1 = (x^2 - 2x)(2x + 3) + 5x + 1$

3. Dùng hằng đẳng thức để làm tính chia: $(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) : (x^2 + y^2)$.

Giải

Ta có: $(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) : (x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2 : (x^2 + y^2) = x^2 + y^2$

B. Bài tập căn bản

67. Sắp xếp các đa thức theo lũy thừa giảm dần của biến rồi làm phép chia:

a) $(x^3 - 7x + 3 - x^2) : (x - 3)$; b) $(2x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2 + 6x) : (x^2 - 2)$

Giải

a)

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -\,x^2 & -\,7x & +\,3 & x-3 \\ \cline{5-5} -\;x^3 & -\,3x^2 & & & x^2+2x-1 \\ \hline & 2x^2 & -\,7x & +\,3 & \\ & -\;2x^2 & -\,6x & & \\ \cline{2-4} & & -x & +\,3 & \\ & & -\;-x & +\,3 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

Vậy: $x^3 - 7x + 3 - x^2 = (x - 3)(x^2 + 2x - 1)$

b)

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^4 & -\,3x^3 & -\,3x^2 & +\,6x & -\,2 & x^2-2 \\ \cline{6-6} -\;2x^4 & & -\,4x^2 & & & 2x^2-3x+1 \\ \hline & -\,3x^3 & +\,x^2 & +\,6x & -\,2 & \\ & -\;-\,3x^3 & & +\,6x & & \\ \cline{2-5} & & x^2 & & -\,2 & \\ & & -\;x^2 & & -\,2 & \\ \cline{3-5} & & & & 0 & \end{array}$$

Vậy: $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2 + 6x = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$.

68. Áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ để thực hiện phép chia:

a) $(x^2 + 2xy + y^2) : (x + y)$; b) $(125x^3 + 1) : (5x + 1)$;

c) $(x^2 - 2xy + y^2) : (y - x)$.

Giải

Dùng hằng đẳng thức để tính nhanh.

a) $(x^2 + 2xy + y^2) : (x + y) = (x + y)^2 : (x + y) = (x + y)$

b) $(125x^3 + 1) : (5x + 1) = [(5x)^3 + 1] : (5x + 1)$

$= (5x + 1)[(5x)^2 - 5x.1 + 1^2] : (5x + 1) = 25x^2 - 5x + 1$

c) $(x^2 - 2xy + y^2) : (y - x) = (x - y)^2 : (y - x) = y - x$

69. Cho hai đa thức: $A = 3x^4 + x^3 + 6x - 5$; $B = x^2 + 1$.

Tìm dư R trong phép chia A cho B rồi viết A dưới dạng: $A = B.Q + R$.

Giải

Chia A cho B, ta có:

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & +\,x^3 & & +\,6x & -\,5 & x^2+1 \\ \cline{6-6} -\;3x^4 & & +\,3x^2 & & & 3x^2+x-3 \\ \hline & x^3 & -\,3x^2 & +\,6x & -\,5 & \\ & -\;x^3 & & +\,x & & \\ \cline{2-5} & & -\,3x^2 & +\,5x & -\,5 & \\ & & -\;-\,3x^2 & & -\,3 & \\ \cline{3-5} & & & 5x & -\,2 & \end{array}$$

Vậy $3x^4 + x^3 + 6x - 5 = (x^2 + 1)(3x^2 + x - 3) + 5x - 2$.

Luyện tập

70. Làm tính chia:

a) $(25x^5 - 5x^4 + 10x^2) : 5x^2$; b) $(15x^3y^2 - 6x^2y - 3x^2y^2) : 6x^2y$.

Giải

a) $(25x^5 - 5x^4 + 10x^2) : 5x^2 = \dfrac{25x^5}{5x^2} - \dfrac{5x^4}{5x^2} + \dfrac{10x^2}{5x^2} = 5x^3 - x^2 + 2$

b) $(15x^3y^2 - 6x^2y - 3x^2y^2) : 6x^2y = \dfrac{15x^3y^2}{6x^2y} - \dfrac{6x^2y}{6x^2y} - \dfrac{3x^2y^2}{6x^2y} = \dfrac{5}{2}xy - 1 - \dfrac{1}{2}y$.

71. Không thực hiện phép chia, hãy xét xem đa thức A có chia hết cho đa thức B không:

a) $A = 15x^4 - 8x^3 + x^2$; $B = \dfrac{1}{2}x^2$; b) $A = x^2 - 2x + 1$; $B = 1 - x$.

Giải

Đa thức A chia hết cho đơn thức B khi và chỉ khi mỗi hạng tử A (phần chữ đều chia hết cho đơn thức B).

a) Ta có mỗi hạng tử của đa thức A đều chia hết cho đơn thức B (bậc của đơn thức $B = \dfrac{1}{2}x^2$ nhỏ hơn hoặc bằng bậc mỗi hạng tử của đa thức $A = 15x^4 - 8x^3 + x^2$)

Vậy đa thức A chia hết cho đơn thức B.

b) Ta có $A = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = (1 - x)^2$, mà $(1 - x)^2 \vdots (1 - x)$

Vậy đa thức A chia hết cho đơn thức B.

72. Làm tính chia: $(2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 2) : (x^2 - x + 1)$.

Giải

Thực hiện phép chia:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & + x^3 & - 3x^2 & + 5x & - 2 & x^2 - x + 1 \\
2x^4 & - 2x^3 & + 2x^2 & & & \overline{2x^2 + 3x - 2} \\
\hline
 & 3x^3 & - 5x^2 & + 5x & - 2 & \\
 & 3x^3 & - 3x^2 & + 3x & & \\
\hline
 & & - 2x^2 & + 2x & - 2 & \\
 & & - 2x^2 & + 2x & - 2 & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Vậy $2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = (x^2 - x + 1)(2x^2 + 3x - 2)$.

73. Tính nhanh:

a) $(4x^2 - 9y^2) : (2x - 3y)$; b) $(27x^3 - 1) : (3x - 1)$;

c) $(8x^3 + 1) : (4x^2 - 2x + 1)$; d) $(x^2 - 3x + xy - 3y) : (x + y)$.

Giải

a) $(4x^2 - 9y^2) : (2x - 3y) = [(2x)^2 - (3y)^2] : (2x - 3y)$

$= (2x + 3y)(2x - 3y) : (2x - 3y) = (2x + 3y)$

b) $(27x^3 - 1) : (3x - 1) = [(3x)^3 - 1^3] : (3x - 1)$

$= (3x - 1)[(3x)^2 + 3x.1 + 1^2] : (3x - 1)$

$= (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) : (3x - 1) = 9x^2 + 3x + 1$

c) $(8x^3 + 1) : (4x^2 - 2x + 1) = [(2x)^3 + 1] : (4x^2 - 2x + 1)$

$= (2x + 1)[(2x)^2 - 2x.1 + 1^2] : (4x^2 - 2x + 1)$

$= (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) : (4x^2 - 2x + 1) = 2x + 1$

d) $(x^2 - 3x + xy - 3y) : (x + y) = [(x^2 - 3x) + (xy - 3y)] : (x + y)$

$= [x(x - 3) + y(x - 3)] : (x + y)$

$= (x - 3)(x + y) : (x + y) = x - 3.$

74. Tìm số a để đa thức $2x^3 - 3x^2 + x + a$ chia hết cho đa thức $x + 2$.

Giải

Ta có A = B.Q + R

Để A = B.Q thì R = 0 (hoặc áp dụng định lí Bézout để tìm a).

Ta thực hiện phép chia:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -3x^2 & +x & +a & x+2 \\
\hline
2x^3 & +4x^2 & & & 2x^2 - 7x + 15 \\
\hline
 & -7x^2 & +x & +a & \\
 & -7x^2 & -14x & & \\
\hline
 & & 15x & +a & \\
 & & 15x & +30 & \\
\hline
 & & & a - 30 &
\end{array}
$$

Để đa thức $2x^3 - 3x^2 + x + a$ chia hết cho đa thức $x + 2$ thì dư $a - 30 = 0$ hay $a = 30$.

Vậy khi $a = 30$ thì đa thức $2x^3 - 3x^2 + x + a$ chia hết cho đa thức $x + 2$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

A. Tóm tắt giáo khoa

- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ với mọi n.
- $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ với n lẻ.
- $(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + nab^{n-1} + b^n$.

Áp dụng trong số học: $a, b \in Z$, $n \in Z+$ ta có:

$a^n - b^n \vdots a - b$ với mọi n $(a \neq b)$

$a^n + b^n \vdots a + b$ với mọi n lẻ.

$a^n - b^n \vdots a + b$ với mọi n chẵn.

B. Bài tập

75. Làm tính nhân: a) $5x^2(3x^2 - 7x + 2)$; b) $\dfrac{2}{3}xy(2x^2y - 3xy + y^2)$.

76. Làm tính nhân: a) $(2x^2 - 3x)(5x^2 - 2x + 1)$; b) $(x - 2y)(3xy + 5y^2 + x)$.

Giải

75. a) $5x^2(3x^2 - 7x + 2) = 15x^4 - 35x^3 + 10x^2$

b) $\dfrac{2}{3}xy(2x^2y - 3xy + y^2) = \dfrac{4}{3}x^3y^2 - 2x^2y^2 + \dfrac{2}{3}xy^3$

76. a) $(2x^2 - 3x)(5x^2 - 2x + 1) = 2x^2(5x^2 - 2x + 1) - 3x(5x^2 - 2x + 1)$

$= 10x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 15x^3 + 6x^2 - 3x$

$= 10x^4 - 19x^3 + 8x^2 - 3x.$

b) $(x - 2y)(3xy + 5y^2 + x) = x(3xy + 5y^2 + x) - 2y(3xy + 5y^2 + x)$

$= 3x^2y + 5xy^2 + x^2 - 6xy^2 - 10y^3 - 2xy$

$= 3x^2y + x^2 - 2xy - xy^2 - 10y^3.$

77. Tính nhanh giá trị của biểu thức:

a) $M = x^2 + 4y^2 - 4xy$ tại $x = 18$; $y = 4$.

b) $N = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$ tại $x = 6$; $y = -8$.

Giải

a) Với $x = 18$; $y = 4$ ta có: $M = x^2 + 4y^2 - 4xy = x^2 - 2x(2y) + (2y)^2$

$= (x - 2y)^2 = (18 - 2.4)^2 = 100$

b) Với $x = 6$; $y = -8$ ta có: $N = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

$= (2x)^3 - 3(2x)^2.y + 3(2x).y^2 - (y)^3$

$= (2x - y)^3 = (2.6 + 8)^3 = 8000$

78. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $(x + 2)(x - 2) - (x - 3)(x + 1)$.

b) $(2x + 1)^2 + (3x - 1)^2 + 2(2x + 1)(3x - 1)$.

Giải

a) $(x + 2)(x - 2) - (x - 3)(x + 1) = (x^2 - 2^2) - (x^2 + x - 3x - 3)$
$= x^2 - 4 - x^2 + 2x + 3 = 2x - 1$

b) $(2x + 1)^2 + (3x - 1)^2 + 2(2x + 1)(3x - 1)$
$= 4x^2 + 4x + 1 + 9x^2 - 6x + 1 + 12x^2 - 4x + 6x - 2 = 25x^2$

79. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - 4 + (x - 2)^2$;   b) $x^3 - 2x^2 + x - xy^2$;   c) $x^3 - 4x^2 - 12x + 27$;

Giải

a) $x^2 - 4 + (x - 2)^2 = (x^2 - 2^2) + (x - 2)^2$
$= (x + 2)(x - 2) + (x - 2)(x - 2)$
$= (x - 2)[(x + 2) + (x - 2)] = 2x(x - 2)$.

b) $x^3 - 2x^2 + x - xy^2 = x(x^2 - 2x + 1 - y^2) = x[(x^2 - 2x + 1) - y^2]$
$= x[(x - 1)^2 - y^2] = x(x - 1 + y)(x - 1 - y)$.

c) $x^3 - 4x^2 - 12x + 27 = (x^3 + 27) - 4x(x + 3)$
$= (x^3 + 3^3) - 4x(x + 3) = (x + 3)(x^2 - 3x + 9) - 4x(x + 3)$
$= (x + 3)(x^2 - 3x + 9 - 4x) = (x + 3)(x^2 - 7x + 9)$.

80. Làm tính chia: a) $(6x^3 - 7x^2 - x + 2) : (2x + 1)$;
b) $(x^4 - x^3 + x^2 + 3x) : (x^2 - 2x + 3)$;
c) $(x^2 - y^2 + 6x + 9) : (x + y + 3)$.

Giải

a)
$$\begin{array}{rrrr|l} 6x^3 & -7x^2 & -x & +2 & 2x+1 \\ \cline{5-5} 6x^3 & +3x^2 & & & 3x^2 - 5x + 2 \\ \hline & -10x^2 & -x & +2 & \\ & -10x^2 & -5x & & \\ \hline & & 4x & +2 & \\ & & 4x & +2 & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Vậy: $(6x^3 - 7x^2 - x + 2) : (2x + 1) = 3x^2 - 5x + 2$

b)
$$\begin{array}{rrrr|l} x^4 & -x^3 & +x^2 & +3x & x^2 - 2x + 3 \\ \cline{5-5} x^4 & -2x^3 & +3x^2 & & x^2 + x \\ \hline & x^3 & -2x^2 & +3x & \\ & x^3 & -2x^2 & +3x & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Vậy: $(x^4 - x^3 + x^2 + 3x) : (x^2 - 2x + 3) = x^2 + x$

c) $(x^2 - y^2 + 6x + 9) : (x + y + 3) = \dfrac{(x^2 + 6x + 9) - y^2}{x + y + 3} = \dfrac{(x + 3)^2 - y^2}{x + y + 3}$

$= \dfrac{(x + 3 + y)(x + 3 - y)}{x + y + 3} = x + 3 - y$

Vậy : $(x^2 - y^2 + 6x + 9) : (x + y + 3) = x + 3 - y$.

81. Tìm x, biết:

a) $\frac{2}{3}x(x^2-4)=0$;   b) $(x+2)^2-(x-2)(x+2)=0$.

c) $x+2\sqrt{2}x^2+2x^3=0$.

Giải

Hướng dẫn: $A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$

a) $\frac{2}{3}x(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x(x+2)(x-2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{2}{3}x=0 \\ x+2=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$ Vậy $x=-2$ hoặc $x=0$ hoặc $x=2$.

b) $(x+2)^2-(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow (x+2)[(x+2)-(x-2)]=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x+2-x+2)=0$

$\Leftrightarrow 4(x+2)=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$. Vậy $x=-2$.

c) $x+2\sqrt{2}x^2+2x^3=0 \Leftrightarrow x(1+2\sqrt{2}x+2x^2)=0$

$\Leftrightarrow x(1+\sqrt{2}x)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 1+\sqrt{2}x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

82. Chứng minh: a) $x^2-2xy+y^2+1>0$ với mọi số thực x và y.

b) $x-x^2-1<0$ với mọi số thực x.

Giải

Hướng dẫn: Ta có $A^2 \ge 0$ với mọi A.

a) Chứng minh $x^2-2xy+y^2+1>0$ với mọi x, y.

Thật vậy: $x^2-2xy+y^2+1=(x^2-2xy+y^2)+1$

$=(x-y)^2+1 \ge 1 > 0$ với mọi x, y

Vậy $x^2-2xy+y^2+1>0$ với mọi số thực x và y (đpcm).

b) Chứng minh: $x-x^2-1<0$ với mọi x

Thật vậy: $x-x^2-1=-(x^2-x+1)=-[x^2-2.x.\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]$

$=-[(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]=-(x-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4} \le -\frac{3}{4}<0$

Vậy $x-x^2-1<0$ với mọi x (đpcm).

83. Tìm $n \in \mathbb{Z}$ để $2n^2-n+2$ chia hết cho $2n+1$.

Giải

Trước hết ta thực hiện phép chia $2n^2 - n + 2$ cho $2n + 1$, ta viết được

$$\frac{2n^2 - n + 2}{2n + 1} = n - 1 + \frac{3}{2n + 1}$$

Để $(2n^2 - n + 2) \vdots (2n + 1)$ với $n \in Z$ thì $2n + 1$ phải là ước của 3 nghĩa là $2n + 1$ phải bằng ± 1; ± 3.

Ta có: $2n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0$

$2n + 1 = -1 \Rightarrow n = -1$

$2n + 1 = 3 \Rightarrow n = 1$

$2n + 1 = -3 \Rightarrow n = -2$

Vậy ta tìm được $n = -2; -1; 0; 1$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1. *Chọn câu trả lời đúng.* Rút gọn $2x(5x^2 - 4x - 1)$, ta được biểu thức :

(A) $10x^2 - 8x^2 + 2x$ (B) $10x^3 - 8x^2 - 2x$

(C) $10x^3 + 8x^2 + 2x$ (D) $10x^3 - 8x^2 + 2x$.

2. *Chọn câu trả lời đúng.* Rút gọn biểu thức : $x^n(x^{n+1} + y^n) - y^n(x^n + y^{n+1})$ được kết quả là :

(A) $x^{n+2} - y^n$ (B) $x^{2n} - y^{2n-1}$ (C) $x^{2n} - y^{2n}$ (D) $x^{2n+1} - y^{2n+1}$.

3. *Chọn câu trả lời đúng.* Tính $\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(9 - 18x)$ được kết quả là :

(A) $18x^3 + 9x^2 - 2x - 1$ (B) $-18x^3 + 9x^2 + 2x - 1$

(C) $18x^3 - 9x^2 - 1$ (D) $-18x^3 + 9x^2 - 2x$.

4. *Chọn câu trả lời đúng.* Tính $(2x + y)^2 + (2x - y)^2$ được kết quả là :

(A) $4x^2 + 2y^2$ (B) $8x^2 - 2y^2$

(C) $8x^2 + 8xy + 2y^2$ (D) $8x^2 + 2y^2$.

5. *Chọn câu trả lời đúng.* Giá trị của biểu thức $A = x^3 - 9x^2 + 27x - 17$ tại $x = 4$ là :

(A) 11 (B) -17 (C) 10 (D) 37.

6. *Chọn câu trả lời đúng.* $(a - b)^3 + (a + b)^3 - a(6b^2 + 2a^2) = ?$

(A) $2a^3 + 2b^3 + 3a^2b$ (B) 0

(C) $a^3 + b^3 + 6a^2b$ (D) $2a^3 + 2b^3$.

7. *Chọn câu trả lời đúng.*

Cho biểu thức : $A = (x - y + z)^2 + (z - y)^2 + 2(x - y + z)(y - z)$.

Giá trị của A tại $x = 10$ là :

(A) 100 (B) 20 (C) 10 (D) 20.

8. *Chọn câu trả lời sai.* Cho $x \in Z$ và $D = (6x - 4)^2 - 16$.

(A) $D \vdots (-6)$ (B) $D \vdots 6$ (C) $D \vdots 12$ (D) $D \vdots 18$.

9. *Chọn câu trả lời đúng.* Kết quả phân tích $3x + 6xy + 2yz + z$ thành nhân tử

(A) $(3x - z)(2y + 1)$ (B) $(3z + x)(2y + 1)$

(C) $(2y + 1)(3z + x)$ (D) $(3x + z)(2y + 1)$.

10. *Chọn câu trả lời đúng.* Thu gọn $(a + b - c)^7 : (a + b - c)^5$

(A) $a + b - c$ (B) $(a + b - c)^3$

(C) $(a + b - c)^2$ (D) $(a + b - c)^4$.

11. *Chọn câu trả lời đúng.* $(9x^3y^3 - 12x^2y + 3xy^2) : (-3xy) = ?$

(A) $-3x^2y^2 - 4x - y$ (B) $-3x^2y^2 + 4x + y$

(C) $3x^2y^2 - 4x - y$ (D) $-3x^2y^2 + 4x - y$.

12. *Tìm câu trả lời sai.* $\left(x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27}\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right) =$

(A) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$ (B) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$ (C) $\left(\frac{1}{3} - x\right)^2$ (D) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$.

13. *Chọn câu trả lời đúng.* $(x^3 + 3x^2 + 2x) : (x + 1)$

(A) $x + 2x^2$ (B) $x^2 - 2x$ (C) $x^2 + 2x$ (D) $x - 2x^2$.

14. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho $P = (x + 3)^2 - (x - 3)(x + 3)$. Tìm giá trị của x để $P = 0$.

(A) $x = 9$ (B) $x = 3$ (C) $x = 6$ (D) $x = -3$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1. $2x(5x^2 - 4x - 1) = 2x.5x^2 - 2x.4x - 2x.1 = 10x^3 - 8x^2 - 2x$. *Chọn câu B.*

2. $x^n.x^{n+1} + x^n.y^n - y^n.x^n - y^n.y^{n-1} = x^{n+n+1} - y^{n+n-1} = x^{2n+1} - y^{2n-1}$. *Chọn câu D.*

3. $\left(x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}\right)(9 - 18x) = 9x^2 - 18x^3 + 3x - 6x^2 - 3x + 6x^2 + 2x - 1$

$= -18x^3 + 9x^2 + 2x - 1$. *Chọn câu B.*

4. $4x^2 + 4xy + y^2 + 4x^2 - 4xy + y^2 = 8x^2 + 2y^2$. *Chọn câu D.*

5. $A = x^3 - 9x^2 + 27x - 17 = x^3 - 3.x^2.3 + 3.x.3^2 - 27 + 10 = (x - 3)^3 + 10$.

Tại $x = 4 \Rightarrow A = (x - 3)^3 + 10 = (4 - 3)^3 + 10 = 11$. *Chọn câu A.*

6. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 6ab^2 - 2a^3 = 0$. *Chọn câu B.*

7. $A = (x - y + z)^2 + 2(x - y + z)(y - z) + (z - y)^2$

$= (x - y + z)^2 - 2(x - y + z)(z - y) + (z - y)^2$

$= [x - y + z - (z - y)]^2$

$= x^2 = 10^2 = 100$. *Chọn câu A.*

8. $D = (6x - 4 - 4)(6x - 4 + 4) = 36x^2 - 48x$

$36 \vdots -6 ; 6 ; 12 ; -12 ; 18$

$48 \vdots -6 ; 6 ; 12 ; -12$. *Chọn câu D.*

9. $3x + z + 2y(3x + z) = (3x + z)(1 + 2y)$. *Chọn câu D.*

10. $(a + b - c)^7 : (a + b - c)^5 = (a + b - c)^{7-5} = (a + b - c)^2$. *Chọn câu C.*

11. $(9x^3y^3 - 12x^2y + 3xy^2) : (-3xy) = 9x^3y^3 : (-3xy) - 12x^2y : (-3xy) + 3xy^2 : (-3xy)$

$= -3x^2y^2 + 4x - y$. *Chọn câu D.*

12. $\left(x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27}\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right) = \left(x^3 - 3.x^2.\frac{1}{3} + 3.x.\frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3}\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$

$= \left(x - \frac{1}{3}\right)^3 : \left(x - \frac{1}{3}\right) = \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \left[-\left(\frac{1}{3} - x\right)\right]^2 = \left(\frac{1}{3} - x\right)^2 = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

Chọn câu B.

13.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 + 2x & x + 1 \\ \cline{2-2} -\; x^3 + x^2 \quad\quad & x^2 + 2x \\ \cline{1-1} 2x^2 + 2x & \\ -\; 2x^2 + 2x & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Chọn câu C.

14. $P = (x + 3)(x + 3 - x + 3) = 0 \Leftrightarrow 6(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = -3$. *Chọn câu D.*

Chương II. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

§1. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: Một phân thức đại số là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là những đa thức và $B \neq 0$.

   A được gọi là tử thức.

   B được gọi là mẫu thức.

   Đặc biệt: Mỗi đa thức cũng được coi như một phân thức với mẫu thức bằng 1.

2. Hai phân thức bằng nhau:

   Cho hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ $(B, D \neq 0)$.

   Ta nói: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $A.D = B.C$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Dùng định nghĩa, xét xem các biểu thức sau đây, biểu thức nào được gọi là phân thức. Vì sao?

$$\frac{x}{5};\ \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y};\ x - 1;\ -3;\ \frac{x+1}{\frac{1}{x^2}}.$$

Giải

Theo định nghĩa phân thức đại số, các biểu thức sau đây là những phân thức: $\frac{x}{5}$; $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y}$; $x - 1$; -3;

Theo định nghĩa, biểu thức: $\frac{x+1}{\frac{1}{x^2}}$ không phải là phân thức đại số, bởi vì: $\frac{1}{x^2}$ không phải là một đa thức.

2. Bạn An bảo rằng: $\frac{3x+3}{3x} = 3$; Còn bạn Mai thì nói: $\frac{3x+3}{3x} = \frac{x+1}{x}$.

Theo em ai nói đúng?

Giải

– Bạn Mai nói đúng. Thật vậy, $3x + 3 = 3(x + 1) \Rightarrow \frac{3x+3}{3x} = \frac{x+1}{x}$ (đpcm)

– Bạn An nói sai. Thật vậy: $(3x + 3).1 = 3x + 3 \neq 3.3x = 9x$ hay $\frac{3x+3}{3x} \neq 3$.

B. Bài tập căn bản

1. Dùng định nghĩa hai phân thức bằng nhau chứng tỏ rằng:

a) $\frac{5y}{7} = \frac{20xy}{28x}$; b) $\frac{3x(x+5)}{2(x+5)} = \frac{3x}{2}$;

c) $\frac{x+2}{x-1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-1}$; d) $\frac{x^2-x-2}{x+1} = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$

e) $\frac{x^3+8}{x^2-2x+4} = x + 2$.

Giải

Hướng dẫn: Ta tính tích 2 trung tỉ số và tích 2 ngoại tỉ số rồi so sánh.

a) $\left.\begin{array}{r}\text{Ta có } 5y.28x = 140xy \\ \text{và } 7.20xy = 140xy\end{array}\right\} \Rightarrow 5y.28x = 7.20xy$

Vậy $\frac{5y}{7} = \frac{20xy}{28x}$.

b) $\left.\begin{array}{ll}\text{Ta có} & 2(x+5).3x = 6x^2 + 30x \\ \text{và} & 3x.2(x+5) = 6x^2 + 30x\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3x(x+5)}{2(x+5)} = \frac{3x}{2}$

c) Ta có: $(x - 1)(x + 2)(x + 1) = (x^2 - 1)(x + 2)$

Vậy $\frac{x+2}{x-1} = \frac{(x+2)(x+1)}{x^2-1}$.

d) Ta có: $(x^2 - x - 2)(x - 1) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

và $(x + 1)(x^2 - 3x + 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Vậy $(x^2 - x - 2)(x - 1) = (x + 1)(x^2 - 3x + 2)$

Suy ra: $\frac{x^2-x-2}{x+1} = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$;

e) Ta có: $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

Vậy $\frac{x^3+8}{x^2-2x+4} = x + 2$.

2. Ba phân thức sau có bằng nhau không: $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x}$, $\frac{x - 3}{x}$, $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x}$?

Giải

Hướng dẫn: Ta chứng minh $\left.\begin{matrix} \frac{A}{B} = \frac{C}{D} \\ \frac{C}{D} = \frac{M}{N} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{M}{N}$

- Ta có: $(x^2 - 2x - 3)x = x^3 - 2x^2 - 3x$ và $(x^2 + x)(x - 3) = x^3 - 2x^2 - 3x$

  Vậy $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x} = \frac{x - 3}{x}$ (1)

- Ta có: $(x - 3)(x^2 - x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ và $x(x^2 - 4x + 3) = x^3 - 4x^2 + 3x$

  Vậy $\frac{x - 3}{x} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x}$ (2)

  Từ (1) và (2), ta có: $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x} = \frac{x - 3}{x} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x}$

3. Cho ba đa thức: $x^2 - 4x$, $x^2 + 4$, $x^2 + 4x$. Hãy chọn đa thức thích hợp trong ba đa thức đó rồi điền vào chỗ trống trong đẳng thức dưới đây:

$$\frac{\ldots\ldots}{x^2 - 16} = \frac{x}{x - 4}$$

Giải

Ta chọn đa thức $x^2 + 4$ để điền vào chỗ trống trong đẳng thức, khi đó ta được đẳng thức: $\frac{x^2 + 4x}{x^2 - 16} = \frac{x}{x - 4}$

Thật vậy: $(x^2 + 4x)(x - 4) = x(x + 4)(x - 4) = x(x^2 - 16)$.

Vậy $\frac{x^2 + 4x}{x^2 - 16} = \frac{x}{x - 4}$.

§2. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Tính chất cơ bản của phân thức:
   - Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác đa thức 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho:

     $\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M}$ (M là một đa thức khác đa thức 0)

   - Nếu chia cả tử và mẫu của một phân thức cho nhân tử chung của chúng thì được một phân thức bằng phân thức đã cho:

     $\frac{A}{B} = \frac{A:N}{B:N}$ (N là một nhân tử chung)

2. Quy tắc đổi dấu: Nếu đổi dấu cả tử và mẫu của phân thức thì được một phân thức bằng phân thức đã cho:

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Dùng tính chất cơ bản của phân thức hãy giải thích vì sao có thể viết:

a) $\frac{2x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x+1}$;   b) $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$.

Giải

a) Ta có $\frac{2x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x}{x+1}$ vì ta chia cả tử và mẫu của phân thức $\frac{2x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$ cho nhân tử chung $(x-1)$ thì được phân thức $\frac{2x}{x+1}$

Hoặc ta nhân tử và mẫu của phân thức $\frac{2x}{x+1}$ với đa thức $(x-1)$ (với $x-1 \neq 0$) thì ta được phân thức $\frac{2x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$.

b) Tương tự, $\frac{A}{B} = \frac{(-1)A}{(-1)B} = \frac{-A}{-B}$.

2. Chứng minh đẳng thức: $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{x+y}$.

Giải

Ta có $\dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \dfrac{(x - y)^2}{(x - y)(x + y)} = \dfrac{(x - y)(x - y)}{(x - y)(x + y)} = \dfrac{x - y}{x + y}$ (đpcm).

B. Bài tập căn bản

4. Cô giáo yêu cầu mỗi bạn cho một ví dụ về hai phân thức bằng nhau. Dưới đây là những ví dụ mà các bạn Lan, Hùng, Giang, Huy đã cho:

$\dfrac{x + 3}{2x - 5} = \dfrac{x^2 + 3x}{2x^2 - 5x}$ (Lan); $\dfrac{(x + 1)^2}{(x^2 + x)} = \dfrac{x + 1}{1}$ (Hùng);

$\dfrac{4 - x}{-3x} = \dfrac{x - 4}{3x}$ (Giang); $\dfrac{(x - 9)^3}{2(9 - x)} = \dfrac{(9 - x)^2}{2}$ (Huy)

Em hãy dùng tính chất cơ bản của phân thức và quy tắc đổi dấu để giải thích ai viết đúng, ai viết sai. Nếu có chỗ nào sai em hãy sửa lại cho đúng.

Giải

- Ví dụ của bạn Lan là ĐÚNG

  Thật vậy $\dfrac{x^2 + 3x}{2x^2 - 5x} = \dfrac{x(x + 3)}{x(2x - 5)} = \dfrac{x + 3}{2x - 5}$ $(x \neq 0)$

- Ví dụ của bạn Hùng cho là SAI

  Thật vậy $\dfrac{(x + 1)^2}{(x^2 + x)} = \dfrac{(x + 1)(x + 1)}{x(x + 1)} = \dfrac{x + 1}{x}$ $(x \neq -1) \neq \dfrac{x + 1}{1}$

  Vậy phải sửa là: $\dfrac{(x + 1)^2}{(x^2 + x)} = \dfrac{x + 1}{x}$ hoặc $\dfrac{(x + 1)^2}{x + 1} = \dfrac{x + 1}{1}$

- Ví dụ của bạn Giang là ĐÚNG

  Thật vậy $\dfrac{4 - x}{-3x} = \dfrac{(4 - x)(-1)}{-3x(-1)} = \dfrac{x - 4}{3x}$

- Ví dụ của bạn Huy cho là SAI

  Thật vậy $\dfrac{(x - 9)^3}{2(9 - x)} = \dfrac{(x - 9)(x - 9)^2}{-2(x - 9)} = \dfrac{(9 - x)^2}{-2} \neq \dfrac{(9 - x)^2}{2}$

  Vậy là phải sửa là: $\dfrac{(x - 9)^3}{2(9 - x)} = \dfrac{-(9 - x)^2}{2}$

  hoặc: $\dfrac{(x - 9)^3}{2(9 - x)} = \dfrac{(9 - x)^3}{-2(9 - x)} = \dfrac{(9 - x)^2}{-2}$

5. Điền đa thức thích hợp vào mỗi chỗ trống trong các đẳng thức sau:

a) $\dfrac{x^3 + x^2}{(x - 1)(x + 1)} = \dfrac{\ldots\ldots}{x - 1}$; b) $\dfrac{5(x + y)}{2} = \dfrac{5x^2 - 5y^2}{\ldots}$.

Giải

Ta biến đổi từ vế phức tạp ra vế đơn giản để tìm đa thức thích hợp.

a) $\dfrac{x^3 + x^2}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x^2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x^2}{x-1}$ $(x \neq -1)$

Vậy phải điền x^2 vào chỗ trống.

b) $\dfrac{5(x+y)}{2} = \dfrac{5(x+y)(x-y)}{2(x-y)} = \dfrac{5\left(x^2-y^2\right)}{2(x-y)} = \dfrac{5x^2-5y^2}{2(x-y)}$.

Vậy phải điền $2(x-y)$ vào chỗ trống.

6. Đố: Hãy dùng tính chất cơ bản của phân thức để điền một đa thức thích hợp vào chỗ trống: $\dfrac{x^5-1}{x^2-1} = \dfrac{.....}{x+1}$.

Giải

Ta có vế trái $\dfrac{x^5-1}{x^2-1} = \dfrac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$

$= \dfrac{(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x+1} = \dfrac{.....}{x+1}$ = vế phải

Suy ra: ...... $= x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Vậy $\dfrac{x^5-1}{x^2-1} = \dfrac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x+1}$.

§3. RÚT GỌN PHÂN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Quy tắc: Muốn rút gọn một phân thức đại số ta phải:
   - Phân tích tử và mẫu thức thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung.
   - Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung giống nhau.
2. Chú ý:
   - Ta có thể trình bày cách giải rút gọn phân thức như sau:

     Ví dụ: Rút gọn phân thức $\dfrac{3x^2-12x^2+12x}{x^2-4}$

     Ta có: $\dfrac{3x^2-12x^2+12x}{x^2-4} = \dfrac{3x(x-2)}{(x+2)}$
   - Có khi cần đổi dấu ở tử hoặc ở mẫu thức để xuất hiện nhân tử chung.

     Ví dụ: Rút gọn phân thức $\dfrac{1-x}{x(x-1)}$

     Ta có: $\dfrac{1-x}{x(x-1)} = \dfrac{-(x-1)}{x(x-1)} = -\dfrac{1}{x}$.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Rút gọn phân thức:

a) $\dfrac{15x^2y^3z^5}{20x^2y^7z^7}$; b) $\dfrac{3x(x-y)^3}{2x^2(x-y)^2}$; c) $\dfrac{x^2+2x+1}{5x^3+5x^2}$; d) $\dfrac{3(x-y)}{y-x}$.

Giải

a) $\dfrac{15x^2y^3z^5}{20x^2y^7z^7} = \dfrac{3.5x^2y^3z^5}{4.5x^2.y^3.y^4.z^5.z^2} = \dfrac{3}{4y^4.z^2}$

b) $\dfrac{3x(x-y)^3}{2x^2(x-y)^2} = \dfrac{3x(x-y)^2(x-y)}{2x.x(x-y)^2} = \dfrac{3(x-y)}{2x}$

c) $\dfrac{x^2+2x+1}{5x^3+5x^2} = \dfrac{(x+1)^2}{5x^2(x+1)} = \dfrac{x+1}{5x^2}$

d) $\dfrac{3(x-y)}{y-x} = \dfrac{3(x-y)}{-(x-y)} = -3$

B. Bài tập căn bản

7. Rút gọn phân thức:

a) $\dfrac{6x^2y^2}{8xy^5}$; b) $\dfrac{10xy^2(x+y)}{15xy(x+y)^3}$; c) $\dfrac{2x^2+2x}{x+1}$; d) $\dfrac{x^2-xy-x+y}{x^2+xy-x-y}$.

Giải

a) $\dfrac{6x^2y^2}{8xy^5} = \dfrac{2.3x.x.y^2}{2.4x.y^2.y^3} = \dfrac{3x}{4y^3}$

b) $\dfrac{10xy^2(x+y)}{15xy(x+y)^3} = \dfrac{2.5xy.y(x+y)}{3.5xy(x+y)(x+y)^2} = \dfrac{2y}{3(x+y)^2}$

c) $\dfrac{2x^2+2x}{x+1} = \dfrac{2x(x+1)}{x+1} = 2x$

d) $\dfrac{x^2-xy-x+y}{x^2+xy-x-y} = \dfrac{(x^2-x)-(xy-y)}{(x^2-x)+(xy-y)}$

$= \dfrac{x(x-1)-y(x-1)}{x(x-1)+y(x-1)} = \dfrac{(x-1)(x-y)}{(x-1)(x+y)} = \dfrac{x-y}{x+y}$

8. Trong tờ nháp của một bạn có ghi một số phép rút gọn phân thức như sau:

a) $\dfrac{3xy}{9y} = \dfrac{x}{3}$; b) $\dfrac{3xy+3}{9xy+3} = \dfrac{x}{3}$;

c) $\frac{3xy+3}{9y+9} = \frac{x+1}{3+3} = \frac{x+1}{6}$;   d) $\frac{3xy+3x}{9y+9} = \frac{x}{3}$

Theo em câu nào đúng, câu nào sai? Em hãy giải thích.

Giải

a) $\frac{3xy}{9y} = \frac{x}{3}$: ĐÚNG, vì thực hiện đúng qui tắc.

b) $\frac{3xy+3}{9xy+3} = \frac{x}{3}$: SAI, vì chưa phân tích tử và mẫu ra thừa số đã vội rút gọn hạng tử ở mẫu với hạng tử ở tử của phân thức.

Làm đúng như sau: $\frac{3xy+3}{9xy+3} = \frac{3(xy+1)}{3(3xy+1)} = \frac{xy+1}{3xy+1}$

c) $\frac{3xy+3}{9y+9} = \frac{x+1}{3+3} = \frac{x+1}{6}$: SAI, (giải thích như bài b))

Làm đúng như sau: $\frac{3xy+3}{9y+9} = \frac{3(xy+1)}{9(y+1)} = \frac{xy+1}{3(y+1)}$

d) $\frac{3xy+3x}{9y+9} = \frac{x}{3}$: ĐÚNG, nhưng lời giải quá gọn, có thể hiểu nhầm về cách giải.

Nên làm như sau: $\frac{3xy+3x}{9y+9} = \frac{3x(y+1)}{9(y+1)} = \frac{x}{3}$.

9. Áp dụng quy tắc đổi dấu rồi rút gọn phân thức:

a) $\frac{36(x-2)^3}{32-16x}$;   b) $\frac{x^2-xy}{5y^2-5xy}$.

Giải

a) $\frac{36(x-2)^3}{32-16x} = \frac{36(x-2)(x-2)^2}{-16(x-2)} = -\frac{9(x-2)^2}{4}$

b) $\frac{x^2-xy}{5y^2-5xy} = \frac{x(x-y)}{5y(y-x)} = \frac{-x(y-x)}{5y(y-x)} = -\frac{x}{5y}$

10. Đố: Đố em rút gọn được phân thức: $\frac{x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2-1}$

Giải

$$\frac{x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2-1} = \frac{(x^7+x^6+x^5+x^4)+(x^3+x^2+x+1)}{x^2-1}$$

$$= \frac{x^4(x^3+x^2+x+1)+(x^3+x^2+x+1)}{x^2-1}$$

$$= \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{[x^2(x + 1) + (x + 1)](x^4 + 1)}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{(x^2 + 1)(x^4 + 1)}{(x - 1)}$$

Luyện tập

11. Rút gọn phân thức: a) $\frac{12x^3y^2}{18xy^5}$; b) $\frac{15x(x+5)^3}{20x^2(x+5)}$

Giải

a) $\frac{12x^3y^2}{18xy^5} = \frac{2.6.x.x^2.y^2}{3.6.x.y^2.y^3} = \frac{2x^2}{3y^3}$

b) $\frac{15x(x+5)^3}{20x^2(x+5)} = \frac{3.5x(x+5)(x+5)^2}{4.5.x.x(x+5)} = \frac{3(x+5)^2}{4x}$

12. Phân tích tử và mẫu thành nhân tử rồi rút gọn phân thức:

a) $\frac{3x^2 - 12x + 12}{x^4 - 8x}$; b) $\frac{7x^2 + 14x + 7}{3x^2 + 3x}$.

Giải

a) $\frac{3x^2 - 12x + 12}{x^4 - 8x} = \frac{3(x^2 - 4x + 4)}{x(x^3 - 8)} = \frac{3(x-2)^2}{x(x^3 - 2^3)}$

$$= \frac{3(x-2)(x-2)}{x(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{3(x-2)}{x(x^2+2x+4)}$$

b) $\frac{7x^2 + 14x + 7}{3x^2 + 3x} = \frac{7(x^2+2x+1)}{3x(x+1)} = \frac{7(x+1)^2}{3x(x+1)} = \frac{7(x+1)}{3x}$

13. Áp dụng quy tắc đổi dấu rồi rút gọn phân thức:

a) $\frac{45x(3-x)}{15x(x-3)^3}$; b) $\frac{y^2 - x^2}{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}$.

Giải

a) $\frac{45x(3-x)}{15x(x-3)^3} = \frac{-3.15x(x-3)}{15x(x-3)(x-3)^2} = \frac{-3}{(x-3)^2}$

b) $\frac{y^2 - x^2}{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3} = \frac{-(x^2 - y^2)}{(x-y)^3} = \frac{-(x-y)(x+y)}{(x-y)(x-y)^2} = \frac{-(x+y)}{(x-y)^2}$

§4. QUY ĐỒNG MẪU THỨC NHIỀU PHÂN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Quy đồng mẫu thức:* Để thực hiện được phép cộng, phép trừ các phân thức không cùng mẫu thức, ta cần phải biến đổi các phân thức đã cho thành những phân thức có mẫu thức chung. Phép biến đổi này gọi là *quy đồng mẫu thức.*
2. *Cách tìm mẫu thức chung (MTC):* Muốn tìm MTC của nhiều phân thức ta phải:
   - Phân tích các mẫu thức thành nhân tử (nếu cần).
   - Chọn một tích gồm các nhân tử chia hết cho các nhân tử bằng số ở các mẫu thức (nếu các nhân tử này là những số nguyên thì đó là BCNN của chúng), với mỗi cơ số của lũy thừa có mặt trong các mẫu thức ta lấy lũy thừa với số mũ cao nhất.

   Ví dụ 1: Tìm mẫu thức chung của các phân thức sau:

   $$\frac{2}{3x^2};\ \frac{x}{x^2+2x+1};\ \frac{y}{2x^2-2}$$

   * Bước 1: Phân tích các mẫu thức thành nhân tử:

   $$3x^2;\ x^2+2x+1=(x+1)^2;\ 2x^2-2=2(x+1)(x-1)$$

   * Bước 2: Tìm MTC $3x^2(x+1)^2(x-1)$
3. *Quy đồng mẫu thức:* Muốn quy đồng mẫu thức nhiều phân thức, ta có thể làm như sau:
   - Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm MTC.
   - Tìm nhân tử phụ (TSP) của mỗi mẫu thức.

   $$\text{TSP} = \frac{\text{MTC}}{\text{MT của PT}}$$

   - Nhân tử thức và mẫu thức của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng

   Ví dụ 2: Quy đồng mẫu thức của các phân thức:

   $$\frac{1}{xy-2y^2};\ \frac{x}{x+2y};\ \frac{x}{4xy^2-x^3}$$

   Giải

   * Bước 1: Tìm MTC
   - Phân tích các mẫu thức thành nhân tử.

   $xy-2y^2=y(x-2y);\ \ x+2y;$

   $4xy^2-x^3=x(4y^2-x^2)=x[(2y)^2-x^2]=x(2y-x)(2y+x)$

   - MTC $= xy(x+2y)(x-2y)$
   * Bước 2: Tìm TSP của từng phân thức.

TSP (phân thức 1) = $\dfrac{xy(x-2y)(x+2y)}{y(x-2y)} = x(x+2y)$

TSP (phân thức 2) = $\dfrac{xy(x-2y)(x+2y)}{x+2y} = xy(x-2y)$

TSP (phân thức 3) = $\dfrac{xy(x-2y)(x+2y)}{x(2y-x)(2y+x)} = -y$

- Bước 3: Quy đồng mẫu thức:

$$\frac{1}{xy-2y^2} = \frac{1.x(x+2y)}{y(x-2y).x(x+2y)} = \frac{x(x+2y)}{xy(x+2y)(x-2y)}$$

$$\frac{x}{x+2y} = \frac{y.xy(x-2y)}{(x+2y).xy(x-2y)} = \frac{xy^2(x-2y)}{xy(x+2y)(x-2y)}$$

$$\frac{x}{4xy^2-x^3} = \frac{x.(-y)}{x(2y-x)(2y+x)(-y)} = \frac{-xy}{xy(x+2y)(x-2y)}$$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Tìm mẫu thức chung của các phân thức sau: $\dfrac{2}{3x^2}$; $\dfrac{x}{x^2+2x+1}$; $\dfrac{y}{2x^2-2}$.

Giải

Bước 1: Phân tích các mẫu thức thành nhân tử:

$3x^2$; $x^2+2x+1=(x+1)^2$; $2x^2-2=2(x+1)(x-1)$

Bước 2: Tìm MTC: $3x^2(x+1)^2(x-1)$

2. Quy đồng mẫu thức của các phân thức: $\dfrac{1}{xy-2y^2}$; $\dfrac{x}{x+2y}$; $\dfrac{x}{4xy^2-x^3}$.

Giải

Bước 1: Tìm MTC

Phân tích các mẫu thức thành nhân tử.

$xy-2y^2=y(x-2y)$; $x+2y$;

$4xy^2-x^3=x(4y^2-x^2)=x[(2y)^2-x^2]=x(2y-x)(2y+x)$

MTC $= xy(x+2y)(x-2y)$

Bước 2: Tìm TSP của từng phân thức.

TSP (phân thức 1) = $\dfrac{xy(x-2y)(x+2y)}{y(x-2y)} = x(x+2y)$

TSP (phân thức 2) = $\dfrac{xy(x-2y)(x+2y)}{x+2y} = xy(x-2y)$

$$\text{TSP (phân thức 3)} = \frac{xy(x-2y)(x+2y)}{x(2y-x)(2y+x)} = -y$$

Bước 3: Quy đồng mẫu thức:

$$\frac{1}{xy-2y^2} = \frac{1.x(x+2y)}{y(x-2y).x(x+2y)} = \frac{x(x+2y)}{xy(x+2y)(x-2y)}$$

$$\frac{x}{x+2y} = \frac{y.xy(x-2y)}{x+2y.xy(x-2y)} = \frac{xy^2(x-2y)}{xy(x+2y)(x-2y)}$$

$$\frac{x}{4xy^2-x^3} = \frac{x.(-y)}{x(2y-x)(2y+x)(-y)} = \frac{-xy}{xy(x+2y)(x-2y)}$$

B. Bài tập căn bản

14. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

a) $\frac{5}{x^5y^3}, \frac{7}{12x^3y^4}$; b) $\frac{4}{15x^3y^5}, \frac{11}{12x^4y^2}$

Giải

a) Ta có MTC $= 12x^5y^4$

Khi đó: $\frac{5}{x^5y^3} = \frac{5.12y}{x^5y^3.12y} = \frac{60y}{12x^5y^4}$;

$$\frac{7}{12x^3y^4} = \frac{7.x^2}{12x^3y^4.x^2} = \frac{7x^2}{12x^5.y^4}$$

b) Ta có MTC $= 60x^4y^5$

Khi đó: $\frac{4}{15x^3y^5} = \frac{4.4x}{15x^3y^5 4x} = \frac{16x}{60x^4y^5}$;

$$\frac{11}{12x^4y^2} = \frac{11.5y^3}{12x^4y^2.5y^3} = \frac{55y^3}{60x^4y^5}.$$

15. Qui đồng mẫu thức của các phân thức sau:

a) $\frac{5}{2x+6}; \frac{3}{x^2-9}$; b) $\frac{2x}{x^2-8x+16}; \frac{x}{3x^2-12x}$.

Giải

a) Ta có: $\left.\begin{array}{l} 2x+6 = 2(x+3) \\ x^2-9 = (x+3)(x-3) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{MTC} = 2(x+3)(x-3)$

$$\text{TSP }(PT_1) = \frac{2(x+3)(x-3)}{2(x+3)} = x-3$$

$$\text{TSP }(PT_2) = \frac{2(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = 2$$

Khi đó: $\dfrac{5}{2x+6} = \dfrac{5(x-3)}{2(x+3)(x-3)}$

$\dfrac{3}{x^2-9} = \dfrac{3.2}{(x+3)(x-3).2} = \dfrac{6}{2(x+3)(x-3)}$

b) Ta có: $\left.\begin{array}{l} x^2-8x+16 = (x-4)^2 \\ 3x^2-12x = 3x(x-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{MTC} = 3x(x-4)^2$

$\text{TSP (P. PT}_1) = \dfrac{3x(x-4)^2}{(x-4)^2} = 3x$

$\text{TSP (P. PT}_2) = \dfrac{3x(x-4)^2}{3x(x-4)} = x-4$

Khi đó: $\dfrac{2x}{x^2-8x+16} = \dfrac{2x.3x}{(x-4)^2.3x} = \dfrac{6x^2}{3x(x-4)^2}$

$\dfrac{x}{3x^2-12x} = \dfrac{x(x-4)}{3x(x-4)(x-4)} = \dfrac{x(x-4)}{3x(x-4)^2}$

16. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau (có thể áp dụng quy tắc đổi dấu đối với một phân thức để tìm mẫu thức chung thuận tiện hơn):

a) $\dfrac{4x^2-3x+5}{x^3-1}, \dfrac{1-2x}{x^2+x+1}; -2$ b) $\dfrac{10}{x+2}, \dfrac{5}{2x-4}, \dfrac{1}{6-3x}$

Giải

a) $\text{MTC} = (x-1)(x^2+x+1)$.

Ta có: $\dfrac{4x^2-3x+5}{x^3-1} = \dfrac{4x^2-3x+5}{(x-1)(x^2+x+1)}$;

$\dfrac{1-2x}{x^2+x+1} = \dfrac{(x-1)(1-2x)}{(x-1)(x^2+x+1)}$;

$-2 = \dfrac{-2(x^3-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

b) Phân tích các mẫu ra thừa số:

$\left.\begin{array}{l} x+2 \\ 2x-4 = 2(x-2) \\ 3x-6 = 3(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{MTC} = 6(x-2)(x+2)$

Ta có: $\dfrac{10}{x+2} = \dfrac{10.6.(x-2)}{6.(x-2)(x+2)} = \dfrac{60(x-2)}{6.(x-2)(x+2)}$

$\dfrac{5}{2x-4} = \dfrac{5}{2(x-2)} = \dfrac{5.3.(x+2)}{6(x-2)(x+2)} = \dfrac{15(x+2)}{6(x-2)(x+2)}$

$$\frac{1}{6-3x}=\frac{-1}{3(x-2)}=\frac{-1.2.(x+2)}{6(x-2)(x+2)}=\frac{-2(x+2)}{6(x-2)(x+2)}.$$

17. Đố. Cho hai phân thức: $\frac{5x^2}{x^3-6x^2}$, $\frac{3x^2+18x}{x^2-36}$.

Khi quy đồng mẫu thức, bạn Tuấn đã chọn MTC = $x^2(x-6)(x+6)$, còn bạn Lan bảo rằng: "Quá đơn giản! MTC = x - 6". Đố em biết bạn nào chọn đúng?

Giải

Ta có: $\left.\begin{array}{l} x^3-6x^2=x^2(x-6) \\ \text{và } x^2-36=(x+6)(x-6) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{MTC}=x^2(x+6)(x-6)$

Vậy bạn Tuấn đã chọn đúng.

Bạn Lan làm như sau: $\frac{5x^2}{x^3-6x^2}=\frac{5x^2}{x^2(x-6)}=\frac{5}{x-6}$

và $\frac{3x^2+18x}{x^2-36}=\frac{3x(x+6)}{(x-6)(x+6)}=\frac{3x}{x-6}$

Vậy bạn Lan cũng chọn đúng.

Luyện tập

18. Quy đồng mẫu thức hai phân thức:

a) $\frac{3x}{2x+4}$ và $\frac{x+3}{x^2-4}$; b) $\frac{x+5}{x^2+4x+4}$ và $\frac{x}{3x+6}$

Giải

a) $\left.\begin{array}{l} 2x+4=2(x+2) \\ x^2-4=(x-2)(x+2) \end{array}\right\} \text{MTC}=2(x-2)(x+2)$

Ta có: $\frac{3x}{2x+4}=\frac{3x(x-2)}{2(x-2)(x+2)}=\frac{3x^2-6x}{2(x^2-4)}$

$\frac{x+3}{x^2-4}=\frac{2(x+3)}{2(x^2-4)}=\frac{2x+6}{2(x^2-4)}$

b) $\left.\begin{array}{l} x^2+4x+4=(x+2)^2 \\ 3x+6=3(x+2) \end{array}\right\} \text{MTC}=3(x+2)^2$

Ta có: $\frac{x+5}{x^2+4x+4}=\frac{3(x+5)}{3(x+2)^2}=\frac{3x+15}{3(x+2)^2}$

$\frac{x}{3(x+2)}=\frac{x(x+2)}{3(x+2)^2}=\frac{x^2+2x}{3(x+2)^2}$

19. Quy đồng mẫu thức của các phân thức sau:

a) $\dfrac{1}{x+2}$; $\dfrac{8}{2x-x^2}$; b) x^2+1; $\dfrac{x^4}{x^2-1}$;

c) $\dfrac{x^3}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}$; $\dfrac{x}{y^2-xy}$.

Giải

a) Ta có $\left.\begin{array}{l} x+2=2+x \\ 2x-x^2=x(2-x) \end{array}\right\}$ ⇒ MTC $= x(2-x)(2+x) = x(4-x^2)$

Khi đó $\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{x(2+x)}{x(2-x)(2+x)} = \dfrac{x(2-x)}{x(4-x^2)}$

và $\dfrac{8}{2x-x^2} = \dfrac{8}{x(2-x)} = \dfrac{8(2+x)}{x(2-x)(2+x)} = \dfrac{8(2+x)}{x(4-x^2)}$

b) MTC $= x^2-1$

Khi đó $x^2+1 = \dfrac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} = \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$ và $\dfrac{x^4}{x^2-1}$

c) Phân tích các mẫu thức:

$\left.\begin{array}{l} x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=(x-y)^3 \\ y^2-xy=y(y-x)=-y(x-y) \end{array}\right\}$ ⇒ MTC $= y(x-y)^3$

Quy đồng mẫu thức: $\dfrac{x^3}{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3} = \dfrac{x^3}{(x-y)^3} = \dfrac{yx^3}{y(x-y)^3}$

và $\dfrac{x}{y^2-xy} = \dfrac{x}{y(y-x)} = \dfrac{x}{-y(x-y)} = \dfrac{-x}{y(x-y)} = \dfrac{-x(x-y)^2}{y(x-y)^3}$

20. Cho hai phân thức $\dfrac{1}{x^2+3x-10}$, $\dfrac{x}{x^2+7x+10}$.

Không dùng cách phân tích các mẫu thức thành nhân tử, hãy chứng tỏ rằng có thể qui đồng mẫu thức hai phân thức này với mẫu thức chung là:

$$x^3+5x^2-4x-20.$$

Giải

Vì $x^3+5x^2-4x-20$ là MTC của hai phân thức, do đó thừa số phụ của mỗi phân thức sẽ bằng MTC chia cho mẫu thức của từng phân thức.

Ta có: TSP (PT_1) $= \dfrac{x^3+5x^2-4x-20}{x^2+3x-10} = x+2$

và TSP (PT_2) $= \dfrac{x^3+5x^2-4x-20}{x^2+7x+10} = x-2$

Vậy $\frac{1}{x^2+3x-10} = \frac{1(x+2)}{(x^2+3x-10)(x+2)} = \frac{(x+2)}{x^3+5x^2-4x-20}$

và $\frac{x}{x^2+7x+10} = \frac{x(x-2)}{(x^2+7x+10)(x-2)} = \frac{x(x-2)}{x^3+5x^2-4x-20}$.

§5. PHÉP CỘNG CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Cộng hai phân thức cùng mẫu thức:

   Quy tắc: Muốn cộng hai (hay nhiều) phân thức cùng mẫu thức ta cộng các tử thức với nhau, giữ nguyên mẫu thức và rút gọn phân thức vừa tìm được (nếu có thể).

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{B} = \frac{A+C}{B}$$

2. Cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau:

   Quy tắc: Muốn cộng hai (hay nhiều) phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức, rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{A.D}{B.D} + \frac{C.B}{B.D} = \frac{A.D + B.C}{B.D}$$

3. Chú ý: Phép cộng các phân thức cũng có các tính chất:

   a) Tính chất giao hoán: $\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{C}{D} + \frac{A}{B}$

   b) Tính kết hợp: $\left(\frac{A}{B} + \frac{C}{D}\right) + \frac{E}{F} = \frac{A}{B} + \left(\frac{C}{D} + \frac{E}{F}\right)$.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Thực hiện phép cộng các phân thức:

a) $\frac{3x+1}{7x^2y} + \frac{2x+2}{7x^2y}$;

b) $\frac{x^2+4}{x-2} + \frac{4x}{2-x}$;

c) $\frac{6}{x^2+4x} + \frac{3}{2x+8}$;

d) $x^2 + x + 1 + \frac{x^3}{1-x}$.

Giải

a) $\frac{3x+1}{7x^2y} + \frac{2x+2}{7x^2y} = \frac{3x+1+2x+2}{7x^2y} = \frac{5x+3}{7x^2y}$

b) $\frac{x^2+4}{x-2}+\frac{4x}{2-x}=\frac{x^2+4}{x-2}+\frac{-4x}{x-2}=\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\frac{(x-2)^2}{x-2}=x-2$

c) $\frac{6}{x^2+4x}+\frac{3}{2x+8}$

Ta có: $\left.\begin{array}{l}x^2+4x=x(x+4)\\2x+8=2(x+4)\end{array}\right\}\Rightarrow MTC=2x(x+4)$

Khi đó $\frac{6}{x^2+4x}+\frac{3}{2x+8}=\frac{6.2}{2x(x+4)}+\frac{3x}{2x(x+4)}=\frac{12+3x}{2x(x+4)}=\frac{3(x+4)}{2x(x+4)}=\frac{3}{2x}$

d) Ta có: $x^2+x+1=\frac{x^2+x+1}{1}$

Vậy MTC = $1-x$

$x^2+x+1+\frac{x^3}{1-x}=\frac{(x^2+x+1)(1-x)}{1-x}+\frac{x^3}{1-x}=\frac{1-x^3+x^3}{1-x}=\frac{1}{1-x}$.

B. Bài tập căn bản

21. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{3x-5}{7}+\frac{4x+5}{7}$; b) $\frac{5xy-4y}{2x^2y^3}+\frac{3xy+4y}{2x^2y^3}$ c) $\frac{x+1}{x-5}+\frac{x-18}{x-5}+\frac{x+2}{x-5}$.

Giải

a) $\frac{3x-5}{7}+\frac{4x+5}{7}=\frac{3x-5+4x+5}{7}=\frac{7x}{7}=x$

b) $\frac{5xy-4y}{2x^2y^3}+\frac{3xy+4y}{2x^2y^3}=\frac{5xy-4y+3xy+4y}{2x^2y^3}=\frac{8xy}{2x^2y^3}=\frac{4}{xy^2}$

c) $\frac{x+1}{x-5}+\frac{x-18}{x-5}+\frac{x+2}{x-5}=\frac{x+1+x-18+x+2}{x-5}=\frac{3(x-5)}{x-5}=3.$

22. Áp dụng quy tắc đổi dấu để các phân thức có cùng mẫu thức rồi làm tính cộng phân thức:

a) $\frac{2x^2-x}{x-1}+\frac{x+1}{1-x}+\frac{2-x^2}{x-1}$; b) $\frac{4-x^2}{x-3}+\frac{2x-2x^2}{3-x}+\frac{5-4x}{x-3}$.

Giải

a) $\frac{2x^2-x}{x-1}+\frac{x+1}{1-x}+\frac{2-x^2}{x-1}=\frac{2x^2-x}{x-1}+\frac{-(x+1)}{x-1}+\frac{2-x^2}{x-1}$

$=\frac{2x^2-x-x-1+2-x^2}{x-1}=\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\frac{(x-1)^2}{x-1}=x-1$

b) $\frac{4-x^2}{x-3}+\frac{2x-2x^2}{3-x}+\frac{5-4x}{x-3}=\frac{4-x^2}{x-3}+\frac{-(2x-2x^2)}{x-3}+\frac{5-4x}{x-3}$

$$= \frac{4 - x^2 - 2x + 2x^2 + 5 - 4x}{x - 3} = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)^2}{x - 3} = x - 3.$$

23. Làm các phép tính sau:

a) $\dfrac{y}{2x^2 - xy} + \dfrac{4x}{y^2 - 2xy}$; b) $\dfrac{1}{x + 2} + \dfrac{3}{x^2 - 4} + \dfrac{x - 14}{(x^2 + 4x + 4)(x - 2)}$;

c) $\dfrac{1}{x + 2} + \dfrac{1}{(x + 2)(4x + 7)}$; d) $\dfrac{1}{x + 3} + \dfrac{1}{(x + 3)(x + 2)} + \dfrac{1}{(x + 2)(4x + 7)}$.

Giải

a) $\dfrac{y}{2x^2 - xy} + \dfrac{4x}{y^2 - 2xy}$

Ta có: $\left.\begin{array}{l} 2x^2 - xy = x(2x - y) \\ y^2 - 2xy = y(y - 2x) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{MTC} = xy(2x - y)$

Khi đó $\dfrac{y}{2x^2 - xy} + \dfrac{4x}{y^2 - 2xy} = \dfrac{y.y}{x.y(2x - y)} + \dfrac{-4x.x}{x.y(2x - y)}$

$$= \frac{y^2 - 4x^2}{xy(2x - y)} = \frac{(y - 2x)(y + 2x)}{xy(2x - y)} = \frac{-(y + 2x)}{xy}$$

b) $\dfrac{1}{x + 2} + \dfrac{3}{x^2 - 4} + \dfrac{x - 14}{(x^2 + 4x + 4)(x - 2)}$

Ta có: $\left.\begin{array}{l} x + 2 \\ x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2) \\ (x^2 + 4x + 4)(x - 2) = (x + 2)^2(x - 2) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \text{MTC} = (x + 2)^2(x - 2)$, khi đó:

$$\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2 - 4} + \frac{x - 14}{(x^2 + 4x + 4)(x - 2)} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x + 2)^2(x - 2)} + \frac{3(x + 2)}{(x + 2)^2(x - 2)} + \frac{x - 14}{(x + 2)^2(x - 2)}$$

$$= \frac{(x + 2)(x - 2) + 3(x + 2) + x - 14}{(x + 2)^2(x - 2)} = \frac{x^2 - 4 + 3x + 6 + x - 14}{(x + 2)^2(x - 2)}$$

$$= \frac{x^2 + 4x - 12}{(x + 2)^2(x - 2)} = \frac{x^2 + 4x + 4 - 16}{(x + 2)^2(x - 2)} = \frac{(x + 2)^2 - 4^2}{(x + 2)^2(x - 2)} = \frac{(x + 2 + 4)(x + 2 - 4)}{(x + 2)^2(x - 2)}$$

$$= \frac{(x + 6)(x - 2)}{(x + 2)^2(x - 2)} = \frac{x + 6}{(x + 2)^2}$$

c) $\dfrac{1}{x + 2} + \dfrac{1}{(x + 2)(4x + 7)} = \dfrac{4x + 7}{(x + 2)(4x + 7)} + \dfrac{1}{(x + 2)(4x + 7)}$

$$= \frac{4x + 7 + 1}{(x + 2)(4x + 7)} = \frac{4x + 8}{(x + 2)(4x + 7)} = \frac{4(x + 2)}{(x + 2)(4x + 7)} = \frac{4}{4x + 7}$$

d) $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{(x+3)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(4x+7)}$

Ta có: $\left.\begin{matrix}(x+3)\\(x+3)(x+2)\\(x+2)(4x+7)\end{matrix}\right|\Rightarrow MTC = (x+2)(x+3)(4x+7)$

Khi đó: $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{(x+3)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(4x+7)}$

$=\frac{(x+2)(4x+7)}{(x+2)(x+3)(4x+7)}+\frac{4x+7}{(x+2)(x+3)(4x+7)}+\frac{x+3}{(x+2)(x+3)(4x+7)}$

$=\frac{(x+2)(4x+7)+4x+7+x+3}{(x+2)(x+3)(4x+7)}=\frac{4x^2+15x+14+4x+7+x+3}{(x+2)(x+3)(4x+7)}$

$=\frac{4x^2+20x+24}{(x+2)(x+3)(4x+7)}=\frac{4(x^2+5x+6)}{(x+2)(x+3)(4x+7)}$

$=\frac{4(x^2+2x+3x+6)}{(x+2)(x+3)(4x+7)}=\frac{4[(x(x+2)+3(x+2)]}{(x+2)(x+3)(4x+7)}$

$=\frac{4(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(4x+7)}=\frac{4}{4x+7}$

24. Một con mèo đuổi bắt một con chuột. Lần đầu mèo chạy với vận tốc x m/s. Chạy được 3m thì mèo bắt được chuột. Mèo vờn con chuột 40 giây rồi thả cho con chuột chạy. Sau đó 15 giây mèo lại đuổi bắt, nhưng với vận tốc nhỏ hơn vận tốc lần đầu là 0,5 m/s. Chạy được 5m mèo lại bắt được chuột. Lần này thì mèo cắn chuột chết. Cuộc săn đuổi kết thúc.

Hãy biểu diễn qua x:

- Thời gian lần thứ nhất mèo đuổi bắt được chuột;
- Thời gian lần thứ hai mèo đuổi bắt được chuột;
- Thời gian kể từ đầu đến khi kết thúc cuộc săn.

Giải

Quãng đường = vận tốc × thời gian

$\Rightarrow$ Thời gian = $\frac{\text{Quãng đường}}{\text{Vận tốc}}$

- Thời gian lần thứ nhất mèo đuổi bắt được chuột: $t_1 = \frac{3}{x}$ (giây)

- Vận tốc để mèo đuổi bắt được chuột lần thứ hai là: $x - 0,5$ (m/s)

Khi đó thời gian mèo chạy để bắt được chuột lần thứ hai là:

$t_2 = \frac{5}{x-0,5}$ (giây)

– Thời gian mèo nghỉ để vờn chuột và chờ đuổi bắt chuột lần thứ hai là:

$$t_3 = 40 + 15 = 55 \text{ (giây)}$$

Vậy thời gian từ đầu đến khi kết thúc cuộc săn là:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{3}{x} + \frac{5}{x - 0,5} + 55 \text{ (giây)}$$

§6. PHÉP TRỪ CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Phân thức đối*

* Hai phân thức được gọi là đối nhau nếu tổng chúng bằng 0.
* Tổng quát: Phân thức đối của phân thức $\frac{A}{B}$ là phân thức $-\frac{A}{B}$ và phân thức đối của phân thức $-\frac{A}{B}$ là phân thức $-(-\frac{A}{B}) = \frac{A}{B}$

Ta có: $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B}$; $-\frac{-A}{B} = \frac{A}{B}$

2. *Phép trừ các phân thức đại số:*

* Quy tắc: Muốn trừ phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$, kí hiệu $\frac{A}{B} - \frac{C}{D}$, bằng cách ta cộng $\frac{A}{B}$ với phân thức đối của $\frac{C}{D}$.
* Tổng quát: $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + (-\frac{C}{D})$.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Tìm phân thức đối của: a) $\frac{1-x}{x}$; b) $x - 2$.

Giải

a) Phân thức đối của phân thức $\frac{1-x}{x}$ là $-\frac{1-x}{x} = \frac{x-1}{x}$

b) Phân thức đối của phân thức $x - 2$ là $-(x - 2) = 2 - x$.

2. Thực hiện các phép tính trừ phân thức:

a) $\frac{x+3}{x^2-1} - \frac{x+1}{x^2-x}$; b) $\frac{x+2}{x^2+3x} - \frac{x+1}{x^2-9}$

Giải

a) $\dfrac{x+3}{x^2-1} - \dfrac{x+1}{x^2-x} = ?$

Ta có: $\left.\begin{array}{l} x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \\ x^2 - x = x(x-1) \end{array}\right\}$ MTC = $x(x+1)(x-1)$

Khi đó $\dfrac{x+3}{x^2-1} - \dfrac{x+1}{x^2-x} = \dfrac{x+3}{(x+1)(x-1)} + \dfrac{-(x+1)}{x(x-1)}$

$= \dfrac{x(x+3)}{x(x-1)(x+1)} + \dfrac{-(x+1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} = \dfrac{x^2+3x-x^2-2x-1}{x(x-1)(x+1)}$

$= \dfrac{x-1}{x(x-1)(x+1)} = \dfrac{1}{x(x+1)}$

b) $\dfrac{x+2}{x^2+3x} - \dfrac{x+1}{x^2-9} = \dfrac{x+2}{x(x+3)} + \dfrac{-(x+1)}{(x+3)(x-3)}$

$= \dfrac{(x+2)(x-3)-x(x+1)}{x(x+3)(x-3)} = \dfrac{x^2-x-6-x^2-x}{x(x+3)(x-3)}$

$= \dfrac{-2x-6}{x(x+3)(x-3)} = \dfrac{-2(x+3)}{x(x+3)(x-3)} = \dfrac{-2}{x(x-3)}$

B. Bài tập căn bản

28. Theo quy tắc đổi dấu ta có: $\dfrac{-A}{B} = \dfrac{A}{-B}$. Do đó ta cũng có $-\dfrac{A}{B} = \dfrac{A}{-B}$.

Chẳng hạn, phân thức đối của $\dfrac{4}{5-x}$ là $-\dfrac{4}{5-x} = \dfrac{4}{-(5-x)} = \dfrac{4}{x-5}$. Áp dụng điều này, hãy điền những phân thức thích hợp vào những chỗ trống dưới đây:

a) $-\dfrac{x^2+2}{1-5x} = \ldots = \ldots$;

b) $-\dfrac{4x+1}{5-x} = \ldots$.

Giải

Ta có: $-\dfrac{A}{B} = \dfrac{-(A)}{B} = \dfrac{A}{-(B)}$

a) $-\dfrac{x^2+2}{1-5x} = \dfrac{x^2+2}{-(1-5x)} = \dfrac{x^2+2}{5x-1}$

b) $-\dfrac{4x+1}{5-x} = \dfrac{4x+1}{-(5-x)} = \dfrac{4x+1}{x-5}$

29. Làm tính trừ các phân thức sau:

a) $\dfrac{4x-1}{3x^2y} - \dfrac{7x-1}{3x^2y}$;

b) $\dfrac{4x+5}{2x-1} - \dfrac{5-9x}{2x-1}$;

c) $\dfrac{11x}{2x-3} - \dfrac{x-18}{3-2x}$;

d) $\dfrac{2x-7}{10x-4} - \dfrac{3x+5}{4-10x}$.

Giải

a) $\dfrac{4x-1}{3x^2y} - \dfrac{7x-1}{3x^2y} = \dfrac{4x-1}{3x^2y} + \dfrac{-(7x-1)}{3x^2y}$

$= \dfrac{4x-1-(7x-1)}{3x^2y} = \dfrac{4x-1-7x+1}{3x^2y} = \dfrac{-3x}{3x^2y} = \dfrac{-1}{xy}$

b) $\dfrac{4x+5}{2x-1} - \dfrac{5-9x}{2x-1} = \dfrac{4x+5}{2x-1} + \dfrac{-(5-9x)}{2x-1}$

$= \dfrac{4x+5-(5-9x)}{2x-1} = \dfrac{4x+5-5+9x}{2x-1} = \dfrac{13x}{2x-1}$

c) $\dfrac{11x}{2x-3} - \dfrac{x-18}{3-2x} = \dfrac{11x}{2x-3} + \dfrac{x-18}{2x-3}$

$= \dfrac{11x+x-18}{2x-3} = \dfrac{12x-18}{2x-3} = \dfrac{6(2x-3)}{2x-3} = 6$

d) $\dfrac{2x-7}{10x-4} - \dfrac{3x+5}{4-10x} = \dfrac{2x-7}{10x-4} + \dfrac{3x+5}{10x-4}$

$= \dfrac{2x-7+3x+5}{10x-4} = \dfrac{5x-2}{10x-4} = \dfrac{5x-2}{2(5x-2)} = \dfrac{1}{2}$

30. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\dfrac{3}{2x+6} - \dfrac{x-6}{2x^2+6x}$;

b) $x^2 + 1 - \dfrac{x^4-3x^2+2}{x^2-1}$

Giải

a) $\dfrac{3}{2x+6} - \dfrac{x-6}{2x^2+6x} = \dfrac{3}{2(x+3)} + \dfrac{-(x-6)}{2x(x+3)}$

$= \dfrac{3x-(x-6)}{2x(x+3)} = \dfrac{3x-x+6}{2x(x+3)} = \dfrac{2(x+3)}{2x(x+3)} = \dfrac{1}{x}$

b) $x^2 + 1 - \dfrac{x^4-3x^2+2}{x^2-1} = \dfrac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} + \dfrac{-(x^4-3x^2+2)}{x^2-1}$

$= \dfrac{(x^4-1)-(x^4-3x^2+2)}{x^2-1} = \dfrac{x^4-1-x^4+3x^2-2}{x^2-1}$

$= \dfrac{3x^2-3}{x^2-1} = \dfrac{3(x^2-1)}{x^2-1} = 3$

31. Chứng tỏ rằng mỗi hiệu sau đây bằng một phân thức có tử bằng 1.

a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}$;

b) $\dfrac{1}{xy-x^2} - \dfrac{1}{y^2-xy}$

Giải

a) $$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)}$$

b) $$\frac{1}{xy - x^2} - \frac{1}{y^2 - xy} = \frac{1}{x(y-x)} - \frac{1}{y(y-x)}$$

$$= \frac{y}{xy(y-x)} - \frac{x}{xy(y-x)} = \frac{y-x}{xy(y-x)} = \frac{1}{xy}$$

Từ hai kết quả trên chứng tỏ rằng nếu cho x và y là những số tự nhiên khác 0 thì giá trị tương ứng của mỗi phân thức trên là một phân số với tử số luôn bằng 1.

32. Đố: Đố em tính nhanh được tổng sau:

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)}$$

Giải

Áp dụng kết quả bài tập 31.a) ta có thể tính nhanh được phép tính đã cho.

Thật vậy, ta có: $$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$$

$$\frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4}$$

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5}$$

$$\frac{1}{(x+5)(x+6)} = \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6}$$

Vậy: $$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + ... + \frac{1}{(x+5)(x+6)}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+6} = \frac{x+6-x}{x(x+6)} = \frac{6}{x(x+6)}$$

Luyện tập

33. Làm các phép tính sau:

a) $\dfrac{4xy-5}{10x^3y}-\dfrac{6y^2-5}{10x^3y}$; b) $\dfrac{7x+6}{2x(x+7)}-\dfrac{3x+6}{2x^2+14x}$.

Giải

a) $\dfrac{4xy-5}{10x^3y}-\dfrac{6y^2-5}{10x^3y}=\dfrac{4xy-5}{10x^3y}+\dfrac{-(6y^2-5)}{10x^3y}$

$=\dfrac{4xy-5-(6y^2-5)}{10x^3y}=\dfrac{4xy-5-6y^2+5}{10x^3y}$

$=\dfrac{4xy-6y^2}{10x^3y}=\dfrac{2y(2x-3y)}{10x^3y}=\dfrac{2x-3y}{5x^3}$

b) $\dfrac{7x+6}{2x(x+7)}-\dfrac{3x+6}{2x^2+14x}=\dfrac{7x+6}{2x(x+7)}+\dfrac{-(3x+6)}{2x(x+7)}=\dfrac{7x+6-(3x+6)}{2x(x+7)}$

$=\dfrac{7x+6-3x-6}{2x(x+7)}=\dfrac{4x}{2x(x+7)}=\dfrac{2}{x+7}$

34. Dùng quy tắc đổi dấu rồi thực hiện các phép tính sau:

a) $\dfrac{4x+13}{5x(x-7)}-\dfrac{x-48}{5x(7-x)}$; b) $\dfrac{1}{x-5x^2}-\dfrac{25x-15}{25x^2-1}$.

Giải

a) $\dfrac{4x+13}{5x(x-7)}-\dfrac{x-48}{5x(7-x)}=\dfrac{4x+13}{5x(x-7)}+\dfrac{x-48}{-5x(7-x)}$

$=\dfrac{4x+13}{5x(x-7)}+\dfrac{x-48}{5x(x-7)}=\dfrac{4x+13+x-48}{5x(x-7)}=\dfrac{5x-35}{5x(x-7)}=\dfrac{5(x-7)}{5x(x-7)}=\dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{1}{x-5x^2}-\dfrac{25x-15}{25x^2-1}=\dfrac{1}{x(1-5x)}-\dfrac{25x-15}{(5x+1)(5x-1)}$

$=\dfrac{-1}{x(5x-1)}+\dfrac{15-25x}{(5x+1)(5x-1)}=\dfrac{-5x-1+15x-25x^2}{x(5x+1)(5x-1)}$

$=\dfrac{-(25x^2-10x+1)}{x(5x+1)(5x-1)}=\dfrac{-(5x-1)^2}{x(5x+1)(5x-1)}=\dfrac{-(5x-1)}{x(5x+1)}=\dfrac{1-5x}{x(5x+1)}$

35. Thực hiện các phép tính:

a) $\dfrac{x+1}{x-3}-\dfrac{1-x}{x+3}-\dfrac{2x(1-x)}{9-x^2}$; b) $\dfrac{3x+1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x+3}{1-x^2}$.

Giải

a) $\dfrac{x+1}{x-3} - \dfrac{1-x}{x+3} - \dfrac{2x(1-x)}{9-x^2} = \dfrac{(x+1)(x+3)}{(x-3)(x+3)} + \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-3)(x+3)} + \dfrac{2x(1-x)}{(x-3)(x+3)}$

$= \dfrac{(x+1)(x+3)+(x-1)(x-3)+2x(1-x)}{(x+3)(x-3)}$

$= \dfrac{x^2+4x+3+x^2-4x+3+2x-2x^2}{(x+3)(x-3)}$

$= \dfrac{2x+6}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)} = \dfrac{2}{x-3}$

b) $\dfrac{3x+1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x+3}{1-x^2} = \dfrac{3x+1}{(x-1)^2} + \dfrac{-1}{x+1} + \dfrac{-(x+3)}{x^2-1}$

$= \dfrac{(3x+1)(x+1)-(x-1)^2-(x+3)(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}$

$= \dfrac{3x^2+4x+1-x^2+2x-1-x^2-2x+3}{(x-1)^2(x+1)}$

$= \dfrac{x^2+4x+3}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{x^2+x+3x+3}{(x-1)^2(x+1)}$

$= \dfrac{x(x+1)+3(x+1)}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{x+3}{(x-1)^2}$

36. Một công ti may mặc phải sản xuất 10000 sản phẩm trong x ngày. Khi thực hiện không những đã làm xong sớm một ngày mà còn làm thêm được 80 sản phẩm.

a) Hãy biểu diễn qua x:

- Số sản phẩm phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch;
- Số sản phẩm thực tế đã làm được trong một ngày;
- Số sản phẩm làm thêm trong một ngày.

b) Tính số sản phẩm làm thêm trong một ngày với x = 25.

Giải

a) Biểu diễn qua x:

- Số sản phẩm phải sản xuất trong một ngày theo kế hoạch là:

$$\frac{10.000}{x} \text{ (sản phẩm)}$$

- Vì công ty phải sản xuất 10.000 sản phẩm xong sớm 1 ngày và còn thêm được 80 sản phẩm. Vậy số sản phẩm thực tế đã làm được trong 1 ngày:

$$\frac{10.000}{x-1}+\frac{80}{x-1}=\frac{10.080}{x-1} \text{ (sản phẩm)}$$

Vậy số sản phẩm làm thêm trong một ngày là:

$$\frac{10.080}{x-1}-\frac{10.000}{x} \text{ (sản phẩm)}$$

b) Với x = 25 thì biểu thức $\frac{10.080}{x-1}-\frac{10.000}{x}$ có giá trị bằng:

$$\frac{10.080}{24}-\frac{10.000}{25}=420-400=20 \text{ (sản phẩm)}$$

Đáp số: 20 (sản phẩm)

37. Đố. Cho phân thức $\frac{2x+1}{x^2-3}$. Đố em tìm được một phân thức mà khi lấy phân thức đã cho trừ đi phân thức phải tìm ta được một phân thức bằng phân thức đối của phân thức đã cho.

Giải

Gọi Δ là phân thức phải tìm, theo đề bài ta có: $\frac{2x+1}{x^2-3}-\Delta=-\frac{2x+1}{x^2-3}$

Suy ra $\Delta=\frac{2x+1}{x^2-3}+\frac{2x+1}{x^2-3}=\frac{4x+2}{x^2-3}$

Vậy phân thức phải tìm là phân thức $\frac{4x+2}{x^2-3}$.

§7. PHÉP NHÂN CÁC PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Quy tắc*: Muốn nhân hai phân thức đại số ta nhân các tử thức với nhau, các mẫu thức với nhau rồi rút gọn phân thức vừa tìm được.

$$\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{A.C}{B.D}$$

2. *Các tính chất*

a) Tính giao hoán: $\frac{A}{B}.\frac{C}{D}=\frac{C}{D}.\frac{A}{B}$

b) Tính kết hợp: $\left(\frac{A}{B}.\frac{C}{D}\right).\frac{E}{F}=\frac{A}{B}.\left(\frac{C}{D}.\frac{E}{F}\right)$

c) Phép nhân phân phối với phép cộng:

$$\frac{A}{B}.\left(\frac{C}{D}+\frac{E}{F}\right)=\frac{A}{B}.\frac{C}{D}+\frac{A}{B}.\frac{E}{F}$$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{(x-13)^2}{2x^5}\cdot\left(-\frac{3x^2}{x-13}\right)$; b) $\frac{x^2+6x+9}{1-x}\cdot\frac{(x-1)^3}{2(x+3)^3}$.

Giải

a) $\frac{(x-13)^2}{2x^5}\cdot\left(-\frac{3x^2}{x-13}\right)=\frac{(x-13)^2.(-3x^2)}{2x^5(x-13)}$

$=\frac{-3x^2(x-13)(x-13)}{2x^5(x-13)}=\frac{-3(x-13)}{2x^3}=\frac{3(13-x)}{2x^3}$

b) $\frac{x^2+6x+9}{1-x}\cdot\frac{(x-1)^3}{2(x+3)^3}=\frac{(x+3)^2}{-(x-1)}\cdot\frac{(x-1)^3}{2(x+3)^3}=-\frac{(x+3)^2.(x-1)^3}{2(x-1)(x+3)^3}=\frac{-(x-1)^2}{2(x+3)}$

2. Tính nhanh: $\frac{3x^5+5x^3+1}{x^4-7x^2+2}\cdot\frac{x}{2x+3}\cdot\frac{x^4-7x^2+2}{3x^5+5x^3+1}$.

Giải

Áp dụng tính chất giao hoán và kết hợp của phép nhân, ta có:

$\frac{3x^5+5x^3+1}{x^4-7x^2+2}\cdot\frac{x}{2x+3}\cdot\frac{x^4-7x^2+2}{3x^5+5x^3+1}$

$=\left(\frac{3x^5+5x^3+1}{x^4-7x^2+2}\cdot\frac{x^4-7x^2+2}{3x^5+5x^3+1}\right)\cdot\frac{x}{2x+3}=\frac{x}{2x+3}$

B. Bài tập căn bản

38. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\frac{15x}{7y^3}\cdot\frac{2y^2}{x^2}$; b) $\frac{4y^2}{11x^4}\cdot\left(-\frac{3x^2}{8y}\right)$; c) $\frac{x^3-8}{5x+20}\cdot\frac{x^2+4x}{x^2+2x+4}$.

Giải

a) $\frac{15x}{7y^3}\cdot\frac{2y^2}{x^2}=\frac{15x.2y^2}{7y^3x^2}=\frac{30}{7xy}$

b) $\frac{4y^2}{11x^4}\cdot\left(-\frac{3x^2}{8y}\right)=\frac{-4y^2.3x^2}{11x^4 8y}=\frac{-3y}{22x^2}$

c) $\frac{x^3-8}{5x+20}\cdot\frac{x^2+4x}{x^2+2x+4}=\frac{(x^3-2^3)(x^2+4x)}{(5x+20)(x^2+2x+4)}$

$=\frac{(x-2)(x^2+2x+4).x(x+4)}{5(x+4)(x^2+2x+4)}=\frac{x(x-2)}{5}$

39. Thực hiện các phép tính sau (chú ý về dấu):

a) $\frac{5x+10}{4x-8}.\frac{4-2x}{x+2}$; b) $\frac{x^2-36}{2x+10}.\frac{3}{6-x}$.

Giải

a) $\frac{5x+10}{4x-8}.\frac{4-2x}{x+2} = \frac{(5x+10)(4-2x)}{(4x-8)(x+2)} = \frac{5(x+2).(4-2x)}{-2(4-2x)(x+2)} = -\frac{5}{2}$

b) $\frac{x^2-36}{2x+10}.\frac{3}{6-x} = \frac{(x^2-36).3}{(2x+10)(6-x)}$

$= \frac{3(x+6)(x-6)}{(2x+10).[-(x-6)]} = \frac{3(x+6)(x-6)}{-2(x+5).(x-6)} = \frac{-3(x+6)}{2(x+5)}$

40. Rút gọn biểu thức sau theo hai cách (sử dụng và không sử dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng):

$$\frac{x-1}{x}.\left(x^2+x+1+\frac{x^3}{x-1}\right)$$

Giải

* *Cách 1:* Rút gọn trực tiếp

Ta có: $\frac{x-1}{x}.\left(x^2+x+1+\frac{x^3}{x-1}\right) = \frac{x-1}{x}.\left[\frac{(x^2+x+1)(x-1)+x^3}{x-1}\right]$

$= \frac{x-1}{x}.\frac{2x^3-1}{x-1} = \frac{2x^3-1}{x}$

* *Cách 2:* Áp dụng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng, ta có:

$\frac{x-1}{x}.\left(x^2+x+1+\frac{x^3}{x-1}\right) = \frac{x-1}{x}.x^2+\frac{x-1}{x}.x+\frac{x-1}{x}+\frac{x^3(x-1)}{x(x-1)}$

$= x(x-1)+x-1+\frac{x-1}{x}+x^2 = \frac{x^2(x-1)+x(x-1)+x-1+x^3}{x}$

$= \frac{x^3-x^2+x^2-x+x-1+x^3}{x} = \frac{2x^3-1}{x}$

Nhận xét: Dù hai cách tính khác nhau, nhưng kết quả đúng bao giờ cũng giống nhau.

41. ***Đố.*** Đố em điền được vào chỗ trống của dãy phép nhân dưới đây những phân thức có mẫu thức bằng tử thức cộng với 1:

$$\frac{1}{x}.\frac{x}{x+1}.\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{x+7}$$

Giải

Ta có thể điền tiếp vào chỗ ...... một phân thức thoả mãn điều kiện trên để tích bằng $\frac{1}{x+7}$.

Ta có: $\frac{1}{x}.\frac{x}{x+1}.\frac{x+1}{x+2}.\frac{x+2}{x+3}.\frac{x+3}{x+4}.\frac{x+4}{x+5}.\frac{x+5}{x+6}.\frac{x+6}{x+7}=\frac{1}{x+7}$.

§8. PHÉP CHIA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Phân thức nghịch đảo:* Hai phân thức được gọi là nghịch đảo nhau nếu tích của chúng bằng 1.

   Cụ thể: Cho $\frac{A}{B}$ là phân thức đại số $\neq 0$ thì:

   - $\frac{B}{A}$ là phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{A}{B}$
   - $\frac{A}{B}$ là phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{B}{A}$

2. *Phép chia các phân thức đại số*

   Quy tắc: Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$ khác 0, bằng cách ta nhân $\frac{A}{B}$ với phân thức nghịch đảo của $\frac{C}{D}$.

   Tổng quát: $\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}.\frac{D}{C}$ (với $\frac{C}{D}\neq 0$)

3. *Chú ý:* Khi có một dãy các phép chia (hoặc phép nhân và phép chia) thì ta phải thực hiện các phép tính theo thứ tự từ trái sang phải hoặc đổi phép chia thành phép nhân với phân số nghịch đảo.

   Ví dụ: $\frac{4x^2}{5y^2}:\frac{6x}{5y}:\frac{2x}{3y}=\left(\frac{4x^2}{5y^2}:\frac{6x}{5y}\right):\frac{2x}{3y}=\left(\frac{4x^2}{5y^2}.\frac{5y}{6x}\right):\frac{2x}{3y}=\frac{2x}{3y}.\frac{3y}{2x}=1$

   hoặc: $\frac{4x^2}{5y^2}:\frac{6x}{5y}:\frac{2x}{3y}=\frac{4x^2}{5y^2}.\frac{5y}{6x}.\frac{3y}{2x}=1$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Tìm phân thức nghịch đảo của mỗi phân thức sau:

a) $-\frac{3y^2}{2x}$; b) $\frac{x^2+x-6}{2x+1}$; c) $\frac{1}{x-2}$; d) $3x+2$.

Giải

a) Phân thức nghịch đảo của phân thức $-\frac{3y^2}{2x}$ là phân thức $-\frac{2x}{3y^2}$ vì:

$$\left(-\frac{3y^2}{2x}\right).\left(-\frac{2x}{3y^2}\right) = 1$$

b) Phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{x^2+x-6}{2x+1}$ là phân thức $\frac{2x+1}{x^2+x-6}$ vì: $\left(\frac{x^2+x-6}{2x+1}\right).\left(\frac{2x+1}{x^2+x-6}\right) = 1$

c) Phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{1}{x-2}$ là phân thức $x-2$ vì:

$$\frac{1}{x-2}.(x-2) = 1$$

d) Phân thức nghịch đảo của phân thức $3x+2$ là phân thức $\frac{1}{3x+2}$ vì:

$$(3x+2).\frac{1}{3x+2} = 1.$$

2. Tính: a) $\frac{24x^3}{5y^2z^4} : \frac{8x^2}{15y^3z^2}$; b) $\frac{x^2-25}{x^2-3x} : \frac{x^2+5x}{x^2-9}$

Giải

a) $\frac{24x^3}{5y^2z^4} : \frac{8x^2}{15y^3z^2} = \frac{24x^3}{5y^2z^4}.\frac{15y^3z^2}{8x^2} = \frac{9xy}{z^2}$

b) $\frac{x^2-25}{x^2-3x} : \frac{x^2+5x}{x^2-9} = \frac{(x^2-25)(x^2-9)}{(x^2-3x)(x^2+5x)}$

$$= \frac{(x+5)(x-5)(x+3)(x-3)}{x(x-3).x(x+5)} = \frac{(x+3)(x-5)}{x^2}$$

B. Bài tập căn bản

42. Làm tính chia phân thức:

a) $\left(-\dfrac{20x}{3y^2}\right):\left(-\dfrac{4x^3}{5y}\right)$; b) $\dfrac{4x+12}{(x+4)^2}:\dfrac{3(x+3)}{x+4}$.

Giải

a) $\left(-\dfrac{20x}{3y^2}\right):\left(-\dfrac{4x^3}{5y}\right)=\left(-\dfrac{20x}{3y^2}\right).\left(-\dfrac{5y}{4x^3}\right)=\dfrac{20x.5y}{3y^2.4x^3}=\dfrac{25}{3x^2y}$

b) $\dfrac{4x+12}{(x+4)^2}:\dfrac{3(x+3)}{x+4}=\dfrac{4x+12}{(x+4)^2}.\dfrac{x+4}{3(x+3)}=\dfrac{4(x+3)(x+4)}{(x+4)^2.3(x+3)}=\dfrac{4}{3(x+4)}$.

43. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\dfrac{5x-10}{x^2+7}:(2x-4)$; b) $(x^2-25):\dfrac{2x+10}{3x-7}$;

c) $\dfrac{x^2+x}{5x^2-10x+5}:\dfrac{3x+3}{5x-5}$.

Giải

a) $\dfrac{5x-10}{x^2+7}:(2x-4)=\dfrac{5x-10}{x^2+7}.\dfrac{1}{2x-4}$

$=\dfrac{(5x-10).1}{(x^2+7)(2x-4)}=\dfrac{5(x-2)}{(x^2+7).2(x-2)}=\dfrac{5}{2(x^2+7)}$

b) $(x^2-25):\dfrac{2x+10}{3x-7}=(x^2-25).\dfrac{3x-7}{2x+10}$

$=\dfrac{(x+5)(x-5).(3x-7)}{2(x+5)}=\dfrac{(x-5).(3x-7)}{2}=\dfrac{3x^2-22x+35}{2}$

c) $\dfrac{x^2+x}{5x^2-10x+5}:\dfrac{3x+3}{5x-5}=\dfrac{x(x+1)}{5(x^2-2x+1)}.\dfrac{5(x-1)}{3(x+1)}$

$=\dfrac{5x(x+1)(x-1)}{5(x-1)^2.3(x+1)}=\dfrac{x}{3(x-1)}$

44. Tìm biểu thức Q, biết rằng: $\dfrac{x^2+2x}{x-1}.Q=\dfrac{x^2-4}{x^2-x}$.

Giải

Ta có: $\dfrac{x^2+2x}{x-1}.Q=\dfrac{x^2-4}{x^2-x}$

$$\Rightarrow Q = \frac{x^2-4}{x^2-x} : \frac{x^2+2x}{x-1} = \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-1)} . \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{(x+2)(x-2)(x-1)}{x^2(x-1)(x+2)} = \frac{x-2}{x^2}$$

Vậy $Q = \frac{x-2}{x^2}$.

45. Đố. Đố em điền được vào chỗ trống của dãy phép chia dưới đây những phân thức có tử thức bằng mẫu thức cộng với 1.

$$\frac{x}{x+1} : \frac{x+2}{x+1} : \frac{x+3}{x+2} : ...... = \frac{x}{x+6}$$

Em hãy ra cho bạn một câu đố tương tự, với vế phải của đẳng thức là $\frac{x}{x+n}$, trong đó n và là số tự nhiên lớn hơn 1 tùy ý mà em thích.

Giải

Ta có thể điền tiếp vào chỗ ...... một số phân thức thỏa mãn đề bài để phép chia bằng phân thức $\frac{x}{x+6}$

Ta có: $\frac{x}{x+1} : \frac{x+2}{x+1} : \frac{x+3}{x+2} : \frac{x+4}{x+3} : \frac{x+5}{x+4} : \frac{x+6}{x+5} = \frac{x}{x+6}$

* Chứng minh: Vận dụng quy tắc được ghi trong phần kiến thức cơ bản.

Ta có: $\frac{x}{x+1} : \frac{x+2}{x+1} : \frac{x+3}{x+2} : \frac{x+4}{x+3} : \frac{x+5}{x+4} : \frac{x+6}{x+5}$

$$= \frac{x}{x+1} . \frac{x+1}{x+2} . \frac{x+2}{x+3} . \frac{x+3}{x+4} . \frac{x+4}{x+5} . \frac{x+5}{x+6} = \frac{x}{x+6}$$

* Câu đố cho bạn em hãy tự cho.

§9. BIẾN ĐỔI CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ. GIÁ TRỊ CỦA PHÂN THỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Biểu thức hữu tỉ*
   - Một biểu thức chỉ chứa các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và chứa biến ở mẫu được gọi là biểu thức phân.
   - Một đa thức còn được gọi là biểu thức nguyên.
   - Các biểu thức nguyên và các biểu thức phân có một tên chung là biểu thức hữu tỉ.
2. *Giá trị của phân thức:* Giá trị của một phân thức chỉ được xác định với điều kiện giá trị của mẫu thức khác 0.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

1. Biến đổi biểu thức sau thành phân thức: $A = \dfrac{1+\dfrac{2}{x-1}}{1+\dfrac{2x}{x^2+1}}$; $B = \dfrac{1-\dfrac{2}{x+1}}{1-\dfrac{x^2-2}{x^2-1}}$.

Giải

Ta có: $A = \dfrac{1+\dfrac{2}{x-1}}{1+\dfrac{2x}{x^2+1}} = \dfrac{\dfrac{x-1+2}{x-1}}{\dfrac{x^2+1+2x}{x^2+1}} = \dfrac{\dfrac{x+1}{x-1}}{\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}}$

$$= \frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x^2+1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

$$B = \frac{1-\dfrac{2}{x+1}}{1-\dfrac{x^2-2}{x^2-1}} = \frac{\dfrac{x+1-2}{x+1}}{\dfrac{x^2-1-(x^2-2)}{x^2-1}} = \frac{\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{1}{x^2-1}} = \frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{1}$$

$$= \frac{(x-1)(x-1)(x+1)}{x+1} = (x-1)^2$$

2. Cho biểu thức: $\dfrac{x+1}{x^2-x} - \dfrac{x+3}{x^2-1}$

a) Tìm điều kiện của x để giá trị của phân thức được xác định.

b) Tính giá trị của biểu thức với x = –0,33.

Giải

Ta có: $\left.\begin{array}{l} x^2 - x = x(x-1) \\ x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow MTC = x(x-1)(x+1)$

Khi đó: $\dfrac{x+1}{x^2-x} - \dfrac{x+3}{x^2-1} = \dfrac{(x+1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} - \dfrac{x(x+3)}{x(x-1)(x+1)}$

$$= \frac{x^2+2x+1-x^2-3x}{x(x+1)(x-1)} = \frac{-x+1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{-(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$$

a) Để phân thức được xác định thì

$$x(x+1)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Vậy để phân thức được xác định thì $x \neq 0$ và $x \neq \pm 1$

b) Với x = −0,33

Ta có: $\frac{x+1}{x^2-x} - \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{-(x-1)}{x(x+1)(x-1)} = \frac{-1}{x(x+1)}$

$$= \frac{-1}{-0,33(-0,33+1)} = \frac{-1}{-0,33.0,67} = \frac{1}{0,2211}$$

B. Bài tập căn bản

46. Biến đổi mỗi biểu thức sau thành một phân thức đại số:

a) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$; b) $\dfrac{1-\dfrac{2}{x+1}}{1-\dfrac{x^2-2}{x^2-1}}$.

Giải

a) $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}} = \dfrac{x+1}{x}.\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x+1}{x-1}$.

b) Xem bài tập mẫu 1B.

47. Với giá trị nào của x thì giá trị của mỗi phân thức sau được xác định?

a) $\frac{5x}{2x+4}$; b) $\frac{x-1}{x^2-1}$.

Giải

a) Phân thức $\frac{5x}{2x+4}$ được xác định khi: $2x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq -4 \Leftrightarrow x \neq -2$

b) Phân thức $\frac{x-1}{x^2-1}$ được xác định khi:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \neq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Vậy phân thức $\frac{x-1}{x^2-1}$ được xác định khi $x \neq \pm 1$.

48. Cho phân thức $\frac{x^2+4x+4}{x+2}$

a) Với điều kiện nào của x thì giá trị của phân thức được xác định?

b) Rút gọn phân thức.

c) Tìm giá trị của x để giá trị của phân thức bằng 1.

d) Có giá trị nào của x để giá trị của phân thức bằng 0 hay không?

Giải

a) Phân thức được xác định khi $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$

b) Rút gọn phân thức: $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = \dfrac{(x + 2)^2}{(x + 2)} = x + 2$ (với $x \neq -2$)

c) Phân thức $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x + 2} = x + 2$ có giá trị bằng 1 hay $x + 2$ có giá trị bằng 1 có nghĩa là $x + 2 = 1$, khi đó: $x + 2 = 1 \Leftrightarrow x = -1$

Vậy khi $x = -1$ thì giá trị của phân thức bằng 1, thỏa mãn $x \neq -2$

d) Phân thức có giá trị bằng 0 nghĩa là: $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (không thỏa mãn điều kiện $x \neq -2$)

Vậy không có giá trị nào của x để giá trị phân thức bằng 0.

49. ***Đố.*** Đố em tìm được một phân thức (của một biến x) mà giá trị của nó được xác định với mọi giá trị của x khác các ước của 2.

Giải

Ta có Ư(2) = {±1; ±2}

Ta có thể tìm được nhiều phân thức thỏa mãn đề bài.

Ví dụ: $\dfrac{1}{(x^2 - 1)(x + 2)(x - 2)}$; $\dfrac{x - 5}{(x^2 - 1)(x + 2)(x - 2)}$

Luyện tập

50. Thực hiện phép tính:

a) $\left(\dfrac{x}{x+1} + 1\right) : \left(1 - \dfrac{3x^2}{1 - x^2}\right)$;

b) $(x^2 - 1)\left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{x + 1} - 1\right)$

Giải

a) $\left(\dfrac{x}{x+1} + 1\right) : \left(1 - \dfrac{3x^2}{1 - x^2}\right) = \dfrac{x + x + 1}{x + 1} : \dfrac{1 - x^2 - 3x^2}{1 - x^2}$

$= \dfrac{2x + 1}{x + 1} \cdot \dfrac{1 - x^2}{1 - 4x^2} = \dfrac{(2x + 1)(1 + x)(1 - x)}{(x + 1)(1 - 2x)(1 + 2x)} = \dfrac{1 - x}{1 - 2x}$

b) $(x^2 - 1)\left(\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{1}{x + 1} - 1\right) = (x^2 - 1)\left[\dfrac{(x + 1) - (x - 1) - (x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)}\right]$

$= (x^2 - 1) \cdot \left[\dfrac{3 - x^2}{(x + 1)(x - 1)}\right] = 3 - x^2$

51. Làm các phép tính sau:

a) $\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)$; b) $\left(\frac{1}{x^2+4x+4}-\frac{1}{x^2-4x+4}\right):\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}\right)$

Giải

a) $\left(\frac{x^2}{y^2}+\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^3+y^3}{xy^2}:\frac{x^2-xy+y^2}{xy^2}=\frac{x^3+y^3}{xy^2}\cdot\frac{xy^2}{x^2-xy+y^2}$

$=\frac{(x^3+y^3).xy^2}{xy^2(x^2-xy+y^2)}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2).xy^2}{xy^2(x^2-xy+y^2)}=x+y$

b) $\left(\frac{1}{x^2+4x+4}-\frac{1}{x^2-4x+4}\right):\left(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-2}\right)$

$=\left[\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x-2)^2}\right]:\left[\frac{x-2+x+2}{(x+2)(x-2)}\right]$

$=\left[\frac{(x-2)^2-(x+2)^2}{(x+2)^2(x-2)^2}\right]:\left[\frac{2x}{(x+2)(x-2)}\right]=\frac{-8x}{(x+2)^2(x-2)^2}\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{2x}$

$=\frac{-4}{(x+2)(x-2)}$ (điều kiện $x\neq 0$; $x\neq\pm 2$)

$=\frac{-4}{x^2-4}$

52. Chứng tỏ rằng với $x\neq 0$ và $x\neq\pm a$ (a là một số nguyên), giá trị của biểu thức: $\left(a-\frac{x^2+a^2}{x+a}\right).\left(\frac{2a}{x}-\frac{4a}{x-a}\right)$ là một số chẵn.

Giải

Ta có $\left(a-\frac{x^2+a^2}{x+a}\right).\left(\frac{2a}{x}-\frac{4a}{x-a}\right)=\left(\frac{ax+a^2-x^2-a^2}{x+a}\right).\left[\frac{2a(x-a)-4ax}{x(x-a)}\right]$

$=\left(\frac{ax-x^2}{x+a}\right).\left[\frac{-2a(a+x)}{x(x-a)}\right]=\left[\frac{x(a-x)}{x+a}\right].\left[\frac{-2a(x+a)}{-x(a-x)}\right]$

$=\frac{x(a-x).2a(x+a)}{(x+a).x(a-x)}=2a$ (điều kiện: $x\neq 0$; $x\neq\pm a$)

Với a là một số nguyên thì 2a luôn là một số chẵn (đpcm)

53. a) Biến đổi mỗi biểu thức sau thành một phân thức đại số:

$1+\frac{1}{x}$; $1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$; $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$;

b) Em hãy dự đoán kết quả của phép biến đổi biểu thức $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}}$

thành phân thức đại số và kiểm tra lại dự đoán đó.

Giải

a) $1 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x}$

Hướng dẫn: Ta thực hiện phép biến đổi từ dưới lên.

$$1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{x+1}{x}} = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{x+1+x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$$

$$1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{x+1}{x}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{x}{x+1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{x+1+x}{x+1}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2x+1}{x+1}} = 1 + \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2x+1+x+1}{2x+1} = \frac{3x+2}{2x+1}.$$

b) Nhận xét: Biểu thức đã cho có dạng tương tự như các biểu thức đã cho ở trên. Do đó ta có thể dự đoán như sau:

- Qua kết quả trên, ta thấy kết quả tiếp theo sau là một phân thức mà tử thức bằng tổng của tử và mẫu thức là tử của kết quả kề trước nó.
- Như vậy, có thể dự đoán rằng nếu biểu thức có bốn gạch phân số thì kết quả là $\dfrac{5x+3}{3x+2}$ và trong trường hợp này có năm gạch phân số.

Vậy kết quả sẽ là $\dfrac{8x+5}{5x+3}$.

54. Tìm các giá trị của x để giá trị của các phân thức sau được xác định:

a) $\dfrac{3x+2}{2x^2-6x}$;   b) $\dfrac{5}{x^2-3}$

Giải

a) Phân thức: $\dfrac{3x+2}{2x^2-6x}$ được xác định khi:

$$2x^2 - 6x \neq 0 \Leftrightarrow 2x(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq 0 \\ x - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

b) Phân thức $\frac{5}{x^2 - 3}$ xác định khi:

$$x^2 - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{3} \neq 0 \\ x + \sqrt{3} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \sqrt{3} \\ x \neq -\sqrt{3} \end{cases}$$

55. Cho phân thức $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

a) Với giá trị nào của x thì giá trị của phân thức được xác định?

b) Chứng tỏ phân thức rút gọn của phân thức đã cho là $\frac{x + 1}{x - 1}$.

c) Để tính giá trị của phân thức đã cho tại x = 2 và tại x = −1, bạn Thắng đã làm như sau:

– Với x = 2, phân thức đã cho có giá trị là $\frac{2 + 1}{2 - 1} = 3$;

– Với x = −1, phân thức đã cho có giá trị là $\frac{-1 + 1}{-1 - 1} = 0$

Em có đồng ý không? Nếu không, em hãy chỉ ra chỗ mà em cho là sai. Theo em, với những giá trị nào của biến thì có thể tính được giá trị của phân thức đã cho bằng cách tính giá trị của phân thức rút gọn?

Giải

a) Phân thức $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$ được xác định khi:

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1.$$

b) Khi đó: $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{x + 1}{x - 1}$

c) – Với x = 2 thì phân thức đã cho được xác định. Bạn Thắng có thể thay vào biểu thức thu gọn để tính và kết quả bằng 3 là đúng.

– Với x = −1 làm cho phân thức đã cho không được xác định (không có nghĩa). Bạn Thắng không thể tính được giá trị của biểu thức đã cho với x = −1.

– Tóm lại, với mọi giá trị của $x \in R \setminus \{\pm 1\}$ thì ta có thể tính giá trị của biểu thức đã cho bằng cách tính giá trị của biểu thức thu gọn.

56. Cho phân thức $\frac{3x^2 + 6x + 12}{x^3 - 8}$

a) Với điều kiện nào của x thì giá trị của phân thức được xác định?

b) Rút gọn phân thức.

c) Em có biết trên $1cm^2$ bề mặt da của em có bao nhiêu con vi khuẩn không? Tính giá trị của biểu thức đã cho tại $x = \frac{4001}{2000}$ em sẽ tìm được câu trả lời thật đáng sợ. (Tuy nhiên trong số đó chỉ có 20% là vi khuẩn có hại).

Giải

a) Phân thức $\frac{3x^2 + 6x + 12}{x^3 - 8}$ được xác định khi:

$$x^3 - 8 \neq 0 \Leftrightarrow x^3 - 2^3 \neq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$$

Vì $x^2 + 2x + 4 = x^2 + 2x + 1 + 3 = (x + 1)^2 + 3 \geq 3$

Vậy phân thức xác định khi $x \neq 2$.

b) Khi đó $\frac{3x^2 + 6x + 12}{x^3 - 8} = \frac{3(x^2 + 2x + 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{3}{x - 2}$

c) Với $x = \frac{4001}{2000}$ ($\neq 2$) nên phân thức đã cho được xác định khi đó phân thức đã cho có giá trị là: $\frac{3}{\frac{4001}{2000} - 2} = \frac{3}{\frac{4001 - 4000}{2000}} = 6000$

Vậy trên $1cm^2$ bề mặt da của em có 6000 con vi khuẩn.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bảng tóm tắt

I. Khái niệm về phân thức đại số và tính chất của phân thức đại số

1. Phân thức đại số là biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, với A, B là những đa thức và B khác đa thức 0.

2. Hai phân thức bằng nhau: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu AD = BC.

3. Tính chất cơ bản của phân thức: Nếu $M \neq 0$ thì $\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M}$

II. Các phép toán trên tập hợp các phân thức đại số

1. Phép cộng

a) Cộng hai phân thức cùng mẫu thức: $\frac{A}{M} + \frac{B}{M} = \frac{A + B}{M}$

b) Cộng hai phân thức khác mẫu thức:

– Quy đồng mẫu thức.

– Cộng hai phân thức cùng mẫu thức vừa tìm được.

2. Phép trừ

a) Phân thức đối của $\frac{A}{B}$ kí hiệu bởi $-\frac{A}{B}$; $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$

b) $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + (-\frac{C}{D})$

3. Phép nhân: $\frac{A}{B}.\frac{C}{D} = \frac{A.C}{B.D}$

4. Phép chia

a) Phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{A}{B}$ khác 0 là $\frac{B}{A}$.

b) $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B}.\frac{D}{C}$

Luyện tập

57. Chứng tỏ mỗi cặp phân thức sau bằng nhau:

a) $\frac{3}{2x-3}$ và $\frac{3x+6}{2x^2+x-6}$;

b) $\frac{2}{x+4}$ và $\frac{2x^2+6x}{x^3+7x^2+12x}$.

Giải

a) $\frac{3x+6}{2x^2+x-6} = \frac{3x+6}{2x^2-8+x+2} = \frac{3(x+2)}{2(x^2-4)+(x+2)}$

$= \frac{3(x+2)}{2(x+2)(x-2)+(x+2)} = \frac{3(x+2)}{(x+2)[2(x-2)+1]}$

$= \frac{3(x+2)}{(x+2)(2x-3)} = \frac{3}{2x-3}$ (điều kiện: $x \neq -2$ và $x \neq \frac{3}{2}$)

b) $\frac{2x^2+6x}{x^3+7x^2+12x} = \frac{2x(x+3)}{x(x^2+7x+12)}$

$= \frac{2x(x+3)}{x[(x^2+3x)+(4x+12)]} = \frac{2x(x+3)}{x[x(x+3)+4(x+3)]}$

$= \frac{2x(x+3)}{x(x+3)(x+4)} = \frac{2}{x+4}$ (điều kiện: $x \neq 0$, $x \neq -4$ và $x \neq -3$)

58. Thực hiện các phép tính sau:

a) $\left(\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1}\right) : \frac{4x}{10x-5}$;

b) $\left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{2-x}{x+1}\right) : \left(\frac{1}{x} + x - 2\right)$;

c) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{x^3-x}{x^2+1}\cdot\left(\dfrac{1}{x^2-2x+1}+\dfrac{1}{1-x^2}\right)$

Giải

Chúng ta thực hiện phép tính trong ngoặc trước.

a) $$\left(\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x+1}\right):\frac{4x}{10x-5}=\left[\frac{(2x+1)^2-(2x-1)^2}{(2x+1)(2x-1)}\right]:\frac{4x}{5(2x-1)}$$

$$=\left[\frac{(2x+1+2x-1)(2x+1-2x+1)}{(2x+1)(2x-1)}\right]:\frac{4x}{5(2x-1)}$$

$$=\frac{8x}{(2x+1)(2x-1)}:\frac{4x}{5(2x-1)}$$

$$=\frac{8x}{(2x+1)(2x-1)}\cdot\frac{5(2x-1)}{4x}=\frac{10}{2x+1}$$

b) $$\left(\frac{1}{x^2+x}-\frac{2-x}{x+1}\right):\left(\frac{1}{x}+x-2\right)=\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{2-x}{x+1}\right]:\left(\frac{1}{x}+x-2\right)$$

$$=\left[\frac{1-x(2-x)}{x(x+1)}\right]:\left(\frac{1+x^2-2x}{x}\right)=\left[\frac{x^2-2x+1}{x(x+1)}\right]:\left(\frac{x^2-2x+1}{x}\right)$$

$$=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)}\cdot\frac{x}{(x-1)^2}=\frac{1}{x+1}$$ (điều kiện: $x\neq 0$, $x\neq 1$ và $x\neq -1$)

c) $$\frac{1}{x-1}-\frac{x^3-x}{x^2+1}\cdot\left(\frac{1}{x^2-2x+1}+\frac{1}{1-x^2}\right)=\frac{1}{x-1}-\frac{x(x^2-1)}{x^2+1}\left[\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x^2-1}\right]$$

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{x(x+1)(x-1)}{x^2+1}\cdot\left[\frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)^2(x+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2+1}\cdot\frac{2}{x-1}$$ (điều kiện: $x\neq\pm 1$)

$$=\frac{x^2+1-2x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{x-1}{x^2+1}$$

59. a) Cho biểu thức $\dfrac{xP}{x+P}-\dfrac{yP}{y-P}$. Thay $P=\dfrac{xy}{x-y}$ vào biểu thức đã cho rồi rút gọn biểu thức.

b) Cho biểu thức $\dfrac{P^2Q^2}{P^2-Q^2}$. Thay $P=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ và $Q=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ vào biểu thức đã cho rồi rút gọn biểu thức.

Giải

a) Thay $P=\dfrac{xy}{x-y}$ vào biểu thức ta được:

$$\frac{xP}{x+P} + \frac{yP}{y-P} = \frac{x.\dfrac{xy}{x-y}}{x+\dfrac{xy}{x-y}} + \frac{y.\dfrac{xy}{x-y}}{y-\dfrac{xy}{x-y}} = \frac{\dfrac{x^2y}{x-y}}{\dfrac{x(x-y)+xy}{x-y}} + \frac{\dfrac{xy^2}{x-y}}{\dfrac{y(x-y)-xy}{x-y}}$$

$$\frac{x^2y}{x-y}.\frac{x-y}{x^2} + \frac{xy^2}{x-y}.\frac{x-y}{-y^2} = \frac{x^2y(x-y)}{x^2(x-y)} + \frac{xy^2(x-y)}{y^2(x-y)} = y + x$$

b) Thay $P = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$, $Q = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ vào biểu thức, ta được:

$$\frac{P^2.Q^2}{P^2-Q^2} = \frac{\left(\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right)^2.\left(\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2}{\left(\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right)^2-\left(\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2} \quad (1)$$

Tử thức: $\left(\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right)^2.\left(\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2 = \left(\dfrac{2xy}{x^2-y^2}.\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2$

$$= \frac{(4x^2y^2)^2}{[(x^2-y^2)(x^2+y^2)]^2} = \frac{16x^4y^4}{(x^4-y^4)^2}$$

Mẫu thức: $\left(\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right)^2 - \left(\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right)^2 = \left(\dfrac{2xy}{x^2-y^2}+\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right).\left(\dfrac{2xy}{x^2-y^2}-\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right)$

$$= \left[\frac{2x^3y+2xy^3+2x^3y-2xy^3}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}\right].\left[\frac{2x^3y+2xy^3-2x^3y+2xy^3}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}\right]$$

$$= \left[\frac{4x^3y}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}\right].\left[\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}\right]$$

$$= \frac{16x^4y^4}{(x^4+y^4)(x^4-y^4)} = \frac{16x^4y^4}{(x^4-y^4)^2}$$

Thay vào (1) ta được: $\dfrac{P^2.Q^2}{P^2-Q^2} = \dfrac{\dfrac{16x^4y^4}{(x^4-y^4)^2}}{\dfrac{16x^4y^4}{(x^4-y^4)^2}} = 1$

60. Cho biểu thức: $\left(\dfrac{x+1}{2x-2}+\dfrac{3}{x^2-1}-\dfrac{x+3}{2x+2}\right).\dfrac{4x^2-4}{5}$

a) Hãy tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức được xác định.

b) Chứng minh rằng khi giá trị của biểu thức được xác định thì nó không phụ thuộc vào giá trị của biến x.

Giải

a) $\left(\dfrac{x+1}{2x-2}+\dfrac{3}{x^2-1}-\dfrac{x+3}{2x+2}\right)\cdot\dfrac{4x^2-4}{5}$

Biểu thức được xác định khi: $\begin{cases}2x-2\neq 0\\ x^2-1\neq 0\\ 2x+2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 1\\ x\neq \pm 1\\ x\neq -1\end{cases} \Leftrightarrow x\neq \pm 1$

b) Hướng dẫn: Biến đổi biểu thức trong ngoặc để trở thành một phân thức rồi thực hiện phép nhân.

Ta có: $\left(\dfrac{x+1}{2x-2}+\dfrac{3}{x^2-1}-\dfrac{x+3}{2x+2}\right)\cdot\dfrac{4x^2-4}{5}$

$$=\left[\frac{x+1}{2(x-1)}+\frac{3}{(x+1)(x-1)}-\frac{x+3}{2(x+1)}\right]\cdot\frac{(2x)^2-2^2}{5}$$

$$=\left[\frac{(x+1)(x+1)+6-(x+3)(x-1)}{2(x+1)(x-1)}\right]\cdot\frac{(2x+2)(2x-2)}{5}$$

$$=\left[\frac{x^2+2x+1+6-x^2-2x+3}{2(x+1)(x-1)}\right]\cdot\frac{4(x+1)(x-1)}{5}$$

$$=\frac{10.4(x+1)(x-1)}{10(x+1)(x-1)}=4 \text{ (đpcm)}$$

61. Tìm điều kiện của x để giá trị của biểu thức:

$$\left(\frac{5x+2}{x^2-10x}+\frac{5x-2}{x^2+10x}\right)\cdot\frac{x^2-100}{x^2+4} \text{ được xác định.}$$

Tính giá trị của biểu thức tại x = 20040.

Giải

a) Tìm điều kiện để biểu thức được xác định:

Biểu thức được xác định khi:

$$\begin{cases}x^2-10x\neq 0\\ x^2+10x\neq 0\\ x^2+4\neq 0, \forall x\in R\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(x-10)\neq 0\\ x(x+10)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 0\\ x\neq \pm 10\end{cases}$$

Vậy biểu thức được xác định khi $x\neq 0$ và $x\neq \pm 10$

b) Hướng dẫn: Ta thu gọn biểu thức trước khi thế giá trị của x vào biểu thức đã cho.

Ta có: $\left(\dfrac{5x+2}{x^2-10x}+\dfrac{5x-2}{x^2+10x}\right)\cdot\dfrac{x^2-100}{x^2+4}$

$$= \left[\frac{5x+2}{x(x-10)} + \frac{5x-2}{x(x+10)}\right] \cdot \frac{(x+10)(x-10)}{x^2+4}$$

$$= \frac{(5x+2)(x+10)+(5x-2)(x-10)}{x(x+10)(x-10)} \cdot \frac{(x+10)(x-10)}{x^2+4}$$

$$= \frac{5x^2+52x+20+5x^2-52x+20}{x(x^2+4)} \text{ (điều kiện: } x \neq \pm 10)$$

$$= \frac{10x^2+40}{x(x^2+4)} = \frac{10(x^2+4)}{x(x^2+4)} = \frac{10}{x} = \frac{10}{20040} = \frac{1}{2004}$$

Vậy giá trị của biểu thức bằng $\frac{1}{2004}$.

62. Tìm giá trị của x để: Giá trị của phân thức $\frac{x^2-10x+25}{x^2-5x}$ bằng 0.

Giải

Hướng dẫn: Cho biểu thức đã cho bằng 0 rồi tính x.

Theo đề bài ta có: $\frac{x^2-10x+25}{x^2-5x} = 0$ (điều kiện $x \neq 0, x \neq 5$)

$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Giá trị x = 5 không thỏa mãn với điều kiện đề bài.

Vậy không có giá trị nào của x để giá trị phân thức bằng 0.

63. Viết mỗi phân thức sau dưới dạng tổng của một đa thức và một phân thức với tử thức là một hằng số, rồi tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của phân thức cũng là số nguyên:

a) $\frac{3x^2-4x-17}{x+2}$; b) $\frac{x^2-x+2}{x-3}$.

Giải

Ta thực hiện phép chia đa thức cho đa thức rồi viết theo yêu cầu của đề bài.

a) Ta có:

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 4x - 17 & x+2 \\ \underline{-\;3x^2 + 6x} & \overline{3x - 10} \\ -10x - 17 & \\ \underline{-\;-10x - 20} & \\ 3 & \end{array}$$

Ta viết: $\frac{3x^2-4x-17}{x+2} = 3x - 10 + \frac{3}{x+2}$

b)

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x + 2 & x-3 \\ \underline{-\;x^2 - 3x} & \overline{x + 2} \\ 2x + 2 & \\ \underline{-\;2x - 6} & \\ 8 & \end{array}$$

Ta viết: $\dfrac{x^2 - x + 2}{x - 3} = x + 2 + \dfrac{8}{x - 3}$.

64. Tính giá trị của phân thức trong bài tập 62 tại x = 1,12 và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba.

Giải

Với x = 1,12 ta có: $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 5x} = \dfrac{(x-5)^2}{x(x-5)} = \dfrac{x-5}{x}$ (điều kiện: $x \neq 5$)

$$= \frac{1,12 - 5}{1,12} = \frac{-3,88}{1,12} = -3,464 \text{ (chính xác đến 0,001)}$$

Vậy giá trị của phân thức bằng –3,464.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

1. *Chọn câu trả lời đúng.*

(A) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2}{x}$ (B) $\dfrac{2x}{3} = \dfrac{3}{2x}$

(C) $\dfrac{2x+1}{5} = \dfrac{5x+1}{2}$ (D) $\dfrac{2x+2}{2x} = \dfrac{x+1}{x}$.

2. *Chọn câu trả lời đúng.*

Đa thức P trong đẳng thức : $\dfrac{(1-x)^3}{P} = \dfrac{x^2+x+1}{x}$ là :

(A) $x - 1$ (B) $x(1 - x)$ (C) $x(x + 1)$ (D) $x + 1$.

3. *Chọn câu trả lời đúng.* Đa thức P trong đẳng thức : $\dfrac{x^2 - x}{4x^2 - 4} = \dfrac{x}{P}$ là :

(A) $4(x - 2)$ (B) $4(x + 1)$ (C) $x + 2$ (D) $x - 2$.

4. *Tìm câu trả lời sai.* Đa thức M trong đẳng thức: $\dfrac{64 - 8x^3}{M} = \dfrac{16 - 8x}{2}$ là :

(A) $2x^2 + 4x + 8$ (B) $2(x + 2)^2 - 4x$

(C) $2(x + 2)^2 - 2x$ (D) $(x + 2)^2 - 2x$.

5. *Chọn câu trả lời đúng.* Biểu thức $\dfrac{x^4 - x^3 + x - 1}{x^6 - 1}$ bằng :

(A) $\dfrac{1}{(x-1)^2}$ (B) $\dfrac{1}{(x+1)^2}$ (C) $\dfrac{1}{(x+1)^2 + x}$ (D) $\dfrac{1}{(x+1)^2 - x}$.

6. *Chọn câu trả lời đúng.*

Mẫu thức chung của các phân thức : $\dfrac{x}{50 - 32x^2}$; $\dfrac{x+1}{4x+5}$ và $\dfrac{2x+1}{4x-5}$ là :

(A) $2(25 - 16x^2)$ (B) $4x - 5$ (C) $4x + 5$ (D) $5 - 4x$.

7. *Chọn câu trả lời đúng.* $\dfrac{2x+5}{x+5} - \dfrac{x+3}{x+5} =$

(A) $\frac{x+2}{x+5}$ (B) $\frac{3x+8}{x+5}$ (C) $\frac{x+8}{x+5}$ (D) $\frac{3x-2}{x+5}$.

8. *Chọn câu trả lời đúng.* $\frac{27-x^3}{x+3} : \frac{x^2-9}{x^2-6x+9} =$

(A) $\frac{9+3x+x^2}{x-3}$ (B) $-(9+3x+x^2)$

(C) $9+3x+x^2$ (D) $\frac{-(9+3x+x^2)}{x+3}$.

9. *Chọn câu trả lời đúng.* $(2x+3) : \frac{4x^2+6x}{x^2+1} =$

(A) $\frac{x^2+1}{x}$ (B) $\frac{x^2+1}{2x}$ (C) $\frac{x}{x^2+1}$ (D) $\frac{2(x^2+1)}{x}$

10. *Chọn câu trả lời đúng.* Đa thức P trong đẳng thức :

$$\frac{x^3+x^2y+xy^2}{2x+y}.P = \frac{x^4-xy^3}{2xy+y^2} \text{ là :}$$

(A) $\frac{x-y}{y}$ (B) $\frac{y}{x-y}$ (C) $\frac{x(x-y)}{2x+y}$ (D) $\frac{2x+y}{x(x-y)}$.

11. *Chọn câu trả lời đúng.* $\left(\frac{x}{x^2-49} - \frac{x-7}{7x+x^2}\right) : \frac{2x-7}{x^2+7x} + \frac{x}{7-x} =$

(A) -1 (B) 1 (C) $\frac{1}{x+7}$ (D) $\frac{1}{7-x}$.

12. *Chọn câu trả lời đúng.* Tìm x để $\frac{36}{x^2+6x} - \frac{x}{x+6} + \frac{7}{x} = 0$

(A) $x = 6$ (B) $x = 7$ (C) $x = 13$ (D) $x = -13$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

1. $\frac{2x+2}{2x} = \frac{2(x+1)}{2.x} = \frac{x+1}{x}$. *Chọn câu D.*

2. $x(1-x)^3 = P(x^2+x+1)$ hay $x(1-x)(1+x+x^2) = P(x^2+x+1)$

Suy ra : $P = x(1-x)$. *Chọn câu B.*

3. $\frac{x^2-x}{4x^2-4} = \frac{x(x-1)}{4(x^2-1)} = \frac{x(x-1)}{4(x-1)(x+1)} = \frac{x}{4(x+1)}$

Suy ra : $P = 4(x+1)$. *Chọn câu B.*

4. $\frac{16-8x}{2} = \frac{8(2-x)}{2} = \frac{8(2-x)(4+2x+x^2)}{2(4+2x+x^2)} = \frac{8(2^3-x^3)}{2(4+2x+x^2)}$

$= \frac{64-8x^3}{2(4+2x+x^2)} = \frac{64-8x^3}{2\left[(x+2)^2-2x\right]}$. Suy ra: $M = 2(x+2)^2 - 4x$. *Chọn câu B.*

5. $\frac{x^4 - x^3 + x - 1}{x^6 - 1} = \frac{(x-1)(x^3+1)}{(x^3-1)(x^3+1)} = \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$= \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{x^2+2x+1-x} = \frac{1}{(x+1)^2-x}$. *Chọn câu D.*

6. $\frac{x}{50-32x^2} = \frac{x}{2(25-16x^2)}$.

$\frac{x+1}{4x+5} = \frac{2(x+1)(4x-5)}{2(4x+5)(4x-5)} = \frac{2(x+1)(4x-5)}{2(16x^2-25)} = -\frac{2(x+1)(4x-5)}{2(25-16x^2)}$

$\frac{2x+1}{4x-5} = -\frac{2x+1}{5-4x} = \frac{-2(2x+1)(5+4x)}{2(5-4x)(5+4x)} = \frac{-2(2x+1)(5+4x)}{2(25-16x^2)}$. *Chọn câu A.*

7. $\frac{2x+5-(x+3)}{x+5} = \frac{2x+5-x-3}{x+5} = \frac{x+2}{x+5}$. *Chọn câu A.*

8. $\frac{(27-x^3)(x^2-9)}{(x+3)(x-3)^2} = \frac{(3-x)(9+3x+x^2)(x-3)(x+3)}{(x+3)(x-3)^2} = \frac{-(x-3)(9+3x+x^2)}{x-3}$

$= -(9+3x+x^2)$. *Chọn câu B.*

9. $(2x+3).\frac{x^2+1}{4x^2+6x} = \frac{(2x+3)(x^2+1)}{2x(2x+3)} = \frac{x^2+1}{2x}$. *Chọn câu B.*

10. $P = \frac{x^4-xy^3}{2xy+y^2} : \frac{x^3+x^2y+xy^2}{2x+y} = \frac{x(x^3-y^3)}{y(2x+y)}.\frac{2x+y}{x(x^2+xy+y^2)}$

$= \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{y(x^2+xy+y^2)} = \frac{x-y}{y}$. *Chọn câu A.*

11. $\frac{x.x-(x-7)(x-7)}{x(x+7)(x-7)}.\frac{x(x+7)}{2x-7}+\frac{x}{7-x}$

$\frac{14x-49}{(x-7)(2x-7)}+\frac{x}{7-x} = \frac{7(2x+7)}{(x+7)(2x+7)} - \frac{x}{x-7} = \frac{7-x}{x-7} = -1$. *Chọn câu A.*

12. Điều kiện : $x \neq 0$; $x \neq -6$.

$\frac{36-x.x+7(x+6)}{x(x+6)} = \frac{-x^2+7x+78}{x(x+6)} = \frac{-x^2-6x+13x+78}{x(x+6)} = \frac{(x+6)(13-x)}{x(x+6)} = \frac{13-x}{x} = 0.$

Biểu thức bằng 0 khi tử bằng 0 và mẫu khác 0 hay: $13 - x = 0 \Rightarrow x = 13$ (thoả điều kiện). *Chọn câu C.*

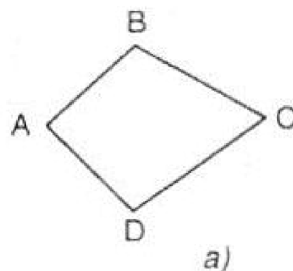
PHẦN HÌNH HỌC

Chương I. TỨ GIÁC

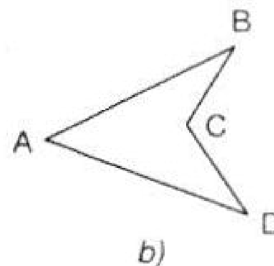
§1. TỨ GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

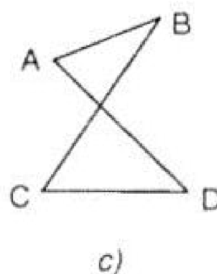
1. *Định nghĩa:* Tứ giác ABCD là hình gồm bốn đoạn thẳng AB, BC, CD, DA, trong đó bất kỳ hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đoạn thẳng.



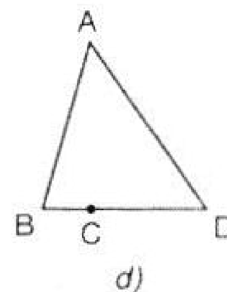
a)



b)



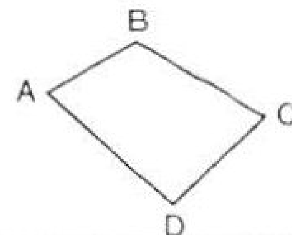
c)



d)

2. *Tứ giác lồi:* Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kỳ cạnh nào của tứ giác.
   Tứ giác ABCD ở hình a) gọi là tứ giác lồi.
3. Tổng các góc của một tứ giác:
   Định lí: Tổng bốn góc của một tứ giác bằng 360^0.

GT	Tứ giác ABCD
KL	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0$

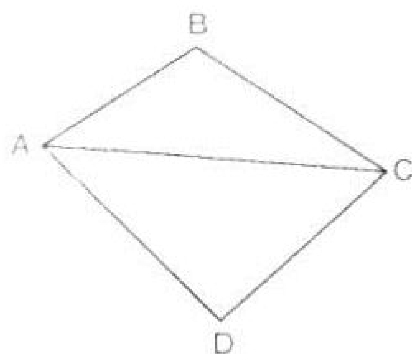


II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Chứng minh rằng tổng bốn góc của tứ giác bằng 360^0.

Giải



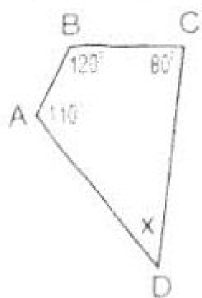
Trong tứ giác ABCD, vẽ đường chéo AC. Tổng số đo bốn góc của tứ giác ABCD bằng tổng số đo các góc của hai tam giác ABC và ADC là bằng:

$$180^0 + 180^0 = 360^0$$

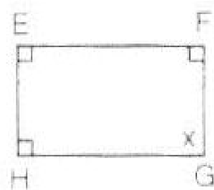
Vậy $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0$.

B. Bài tập căn bản

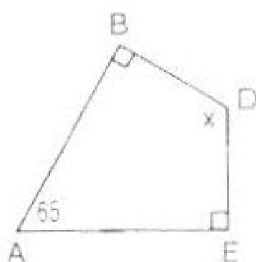
1. Tìm giá trị x ở hình 5, hình 6:



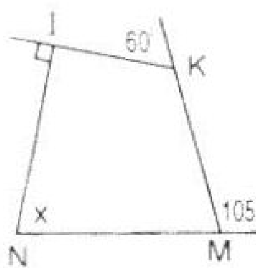
a)



b)

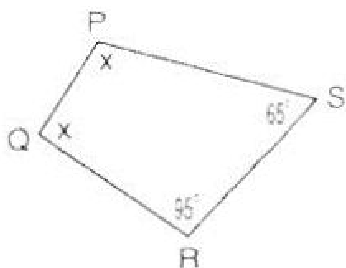


c)

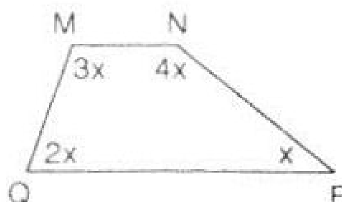


d)

Hình 5



a)



b)

Hình 6

Giải

Tìm giá trị x:

* Hình 5a:

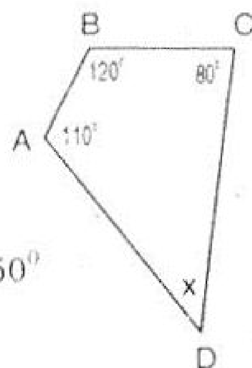
Trong tứ giác ABCD, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^0$$

Hay $110^0 + 120^0 + 80^0 + x = 360^0$

$\Rightarrow x = 360^0 - (110^0 + 120^0 + 80^0) = 360^0 - 310^0 = 50^0$

Vậy $x = 50^0$



* Hình 5b:

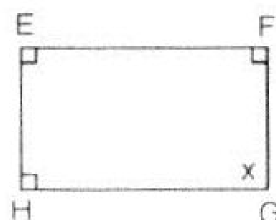
Trong tứ giác HEFG, ta có:

$$\hat{H} + \hat{E} + \hat{F} + \hat{G} = 360^0$$

Hay $90^0 + 90^0 + 90^0 + x = 360^0$

$\Rightarrow x = 360^0 - (90^0 + 90^0 + 90^0) = 360^0 - 270^0 = 90^0$

Vậy $x = 90^0$



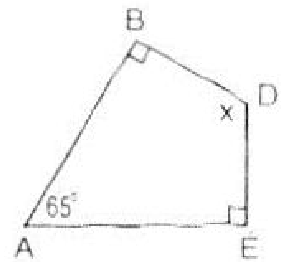
* Hình 5c:

Trong tứ giác ABDE, ta có: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D} + \widehat{E} = 360^0$

hay $65^0 + 90^0 + x + 90^0 = 360^0$

$\Rightarrow$ $x = 360^0 - (65^0 + 90^0 + 90^0) = 115^0$

Vậy $x = 115^0$.

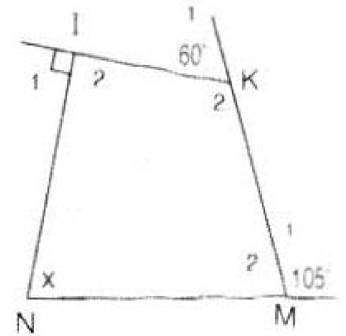


* Hình 5d:

Ta có $\widehat{I_1}$ và $\widehat{I_2}$ là hai góc kề bù nên:

$\widehat{I_1} + \widehat{I_2} = 180^0$

$\Rightarrow$ $\widehat{I_2} = 180^0 - \widehat{I_1} = 180^0 - 90^0 = 90^0$



Ta có $\widehat{K_1}$ và $\widehat{K_2}$ là 2 góc kề bù nên:

$\widehat{K_1} + \widehat{K_2} = 180^0$

$\Rightarrow$ $\widehat{K_2} = 180^0 - \widehat{K_1} = 180^0 - 60^0 = 120^0$

Ta có $\widehat{M_1}$ và $\widehat{M_2}$ là hai góc kề bù nên:

$\widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 180^0 \Rightarrow \widehat{M_2} = 180^0 - \widehat{M_1} = 180^0 - 105^0 = 75^0$

Trong tứ giác IKMN, ta có: $\widehat{I_2} + \widehat{K_2} + \widehat{M_2} + \widehat{N} = 360^0$

Hay $90^0 + 120^0 + 75^0 + x = 360^0$

$\Rightarrow$ $x = 360^0 - (90^0 + 120^0 + 75^0) = 360^0 - 285^0 = 75^0$

Vậy $x = 75^0$

* Hình 6a:

Trong tứ giác PQRS, ta có:

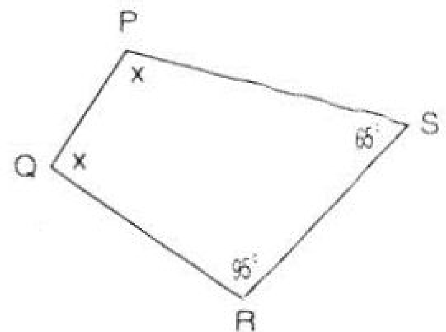
$\widehat{P} + \widehat{Q} + \widehat{R} + \widehat{S} = 360^0$

Hay $x + x + 95^0 + 65^0 = 360^0$

$\Rightarrow$ $2x = 360^0 - (95^0 + 65^0)$

$2x = 360^0 - 160^0 = 200^0 \Rightarrow x = 100^0$

Vậy $x = 100^0$



* Hình 6b:

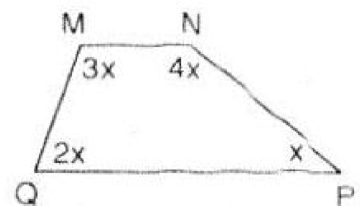
Xét tứ giác MNPQ, ta có:

$\widehat{M} + \widehat{N} + \widehat{P} + \widehat{Q} = 360^0$

$\Rightarrow$ $3x + 4x + x + 2x = 360^0$

$\Leftrightarrow$ $10x = 360^0 \Leftrightarrow x = 36^0$

Vậy $x = 36^0$.

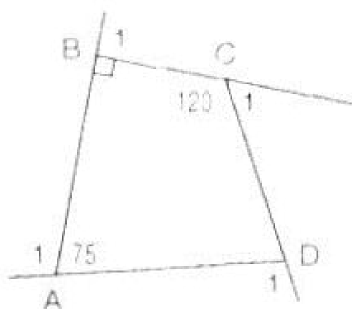


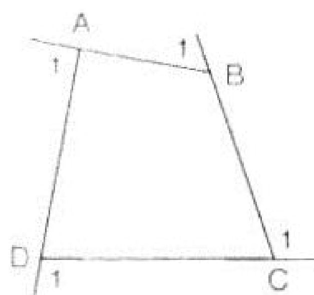
2. Góc kề bù với một góc của tứ giác gọi là góc ngoài của tứ giác.

a) Tính các góc ngoài của tứ giác ở hình 7a.

b) Tính tổng các góc ngoài của tứ giác ở hình 7b (tại mỗi đỉnh của tứ giác chỉ chọn một góc ngoài) : $\widehat{A_1} + \widehat{B_1} + \widehat{C_1} + \widehat{D_1} = ?$

c) Có nhận xét gì về tổng các góc ngoài của tứ giác?





Hình 7

Giải

a. Xét tứ giác ABCD, ta có:

$\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_2 = 360^0$

hay $75^0 + 90^0 + 120^0 + \hat{D}_2 = 360^0$

$\Rightarrow \hat{D}_2 = 360^0 - (75^0 + 90^0 + 120^0)$

$\hat{D}_2 = 360^0 - 285^0 = 75^0$

Ta có $\hat{A}_1$ và $\hat{A}_2$ là hai góc kề bù nên: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^0$

hay $75^0 + \hat{A}_1 = 180^0 \Rightarrow \hat{A}_1 = 180^0 - 75^0 = 105^0$

Vậy $\hat{A}_1 = 105^0$

Ta có: $\hat{B}_1$ và $\hat{B}_2$ là hai góc kề bù nên:

$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^0$ hay $\hat{B}_1 = 180^0 - \hat{B}_2 = 180^0 - 90^0 = 90^0$

Vậy $\hat{B}_1 = 90^0$

Ta có $\hat{C}_1$ và $\hat{C}_2$ là hai góc kề bù nên:

$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^0$ hay $120^0 + \hat{C}_1 = 180^0 \Rightarrow \hat{C}_1 = 180^0 - 120^0 = 60^0$

Vậy $\hat{C}_1 = 60^0$

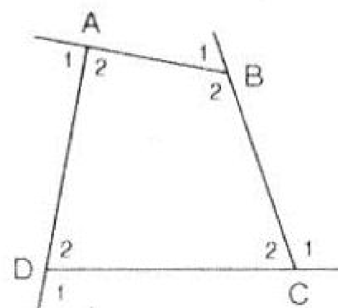
Ta có $\hat{D}_1$ và $\hat{D}_2$ là hai góc kề bù nên:

$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^0$ hay $75^0 + \hat{D}_1 = 180^0 \Rightarrow \hat{D}_1 = 180^0 - 75^0 = 105^0$

Vậy $\hat{D}_1 = 105^0$

b) Xét tứ giác ABCD, ta có: $\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_2 = 360^0$ (1)

Ta có: $\hat{A}_2$ và $\hat{A}_1$; $\hat{B}_2$ và $\hat{B}_1$; $\hat{C}_2$ và $\hat{C}_1$; $\hat{D}_2$ và $\hat{D}_1$ là các cặp góc kề bù nên:



$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180^0$

$\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^0$

$\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180^0$

$\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^0$

$(\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1) + (\hat{A}_2 + \hat{B}_2 + \hat{C}_2 + \hat{D}_2)$

$= 4.180^0 = 720^0$ (2)

Thế (1) vào (2) ta được: $(\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1) + 360^0 = 720^0$

$$\Rightarrow \quad \widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = 720^0 - 360^0 = 360^0$$

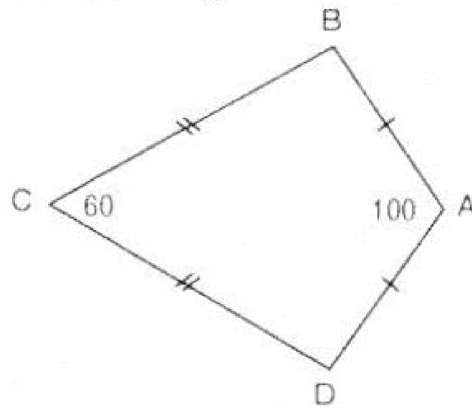
Vậy $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{D}_1 = 360^0$.

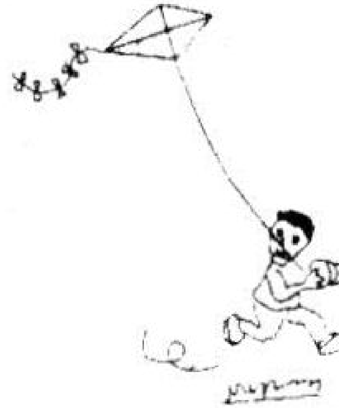
c) Nhận xét: Tổng các góc ngoài của một tứ giác bằng 360^0.

3. Ta gọi tứ giác ABCD trên hình 8 có AB = AD, CB = CD là hình "cái diều".

a) Chứng minh rằng AC là đường trung trực của BD.

b) Tính $\widehat{B}$, $\widehat{D}$ biết rằng $\widehat{A} = 100^0$, $\widehat{C} = 60^0$.





Hình 8

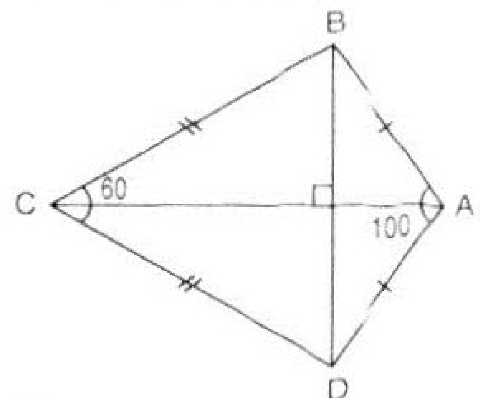
Giải

a) Ta có CB = CD (gt). Vậy C nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng BD (1). Tương tự, ta có AB = AD (gt)

Vậy A nằm trên đường trung trực của BD (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra AC là đường trung trực của BD (đpcm)

b) Xét hai tam giác CBA và CDA ta có:



$$\left.\begin{array}{l} CB = CD \text{ (gt)} \\ AB = AD \text{ (gt)} \\ AC : \text{cạnh chung} \end{array}\right\} \text{Vậy } \Delta CBA = \Delta CDA$$

Suy ra $\widehat{B} = \widehat{D}$

- Xét tứ giác ABCD, ta có:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^0$$

Hay $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{B} = 360^0$ (vì $\widehat{B} = \widehat{D}$)

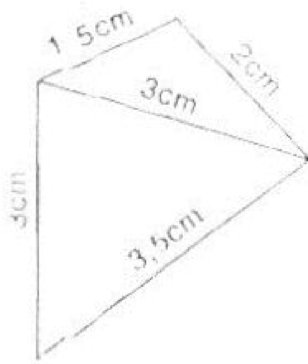
$$\Rightarrow \quad 2\widehat{B} = 360^0 - (\widehat{A} + \widehat{C})$$

$$2\widehat{B} = 360^0 - (100^0 + 60^0) = 360^0 - 160^0 = 200^0$$

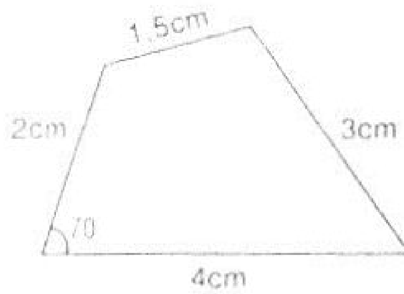
$$\Rightarrow \quad \widehat{B} = 100^0$$

Vậy $\widehat{B} = \widehat{D} = 100^0$

4. Dựa vào cách vẽ các tam giác đã học, hãy vẽ lại các tứ giác ở hình a, hình b vào vở.

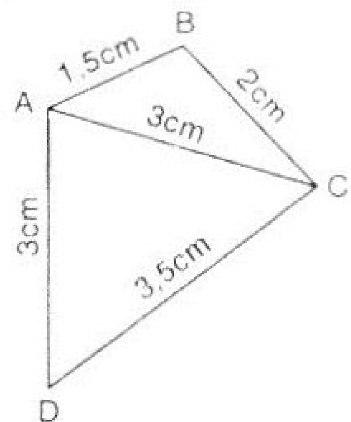


a)



b)

Giải



Hướng dẫn: Dùng thước đo góc và compa để vẽ:

a) Hình a:

Dùng thước đo độ dài vẽ đoạn AC = 3cm.

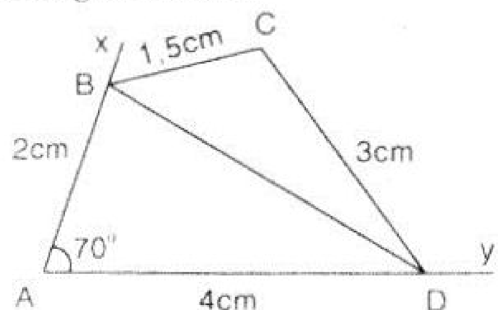
Lấy A làm tâm, trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC ta vẽ cung tròn có bán kính bằng 1,5cm và cung tròn có bán kính bằng 3cm.

Tương tự, lấy C làm tâm, trên hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AC ta vẽ cung tròn có bán kính bằng 2cm và cung tròn có bán kính bằng 3,5cm.

Chúng cắt nhau tại B và D.

Nối 4 điểm A, B, C, D lại với nhau ta vẽ được tứ giác đã cho.

b) Hình b:



Dùng thước đo góc ta vẽ góc $\widehat{xAy} = 70°$

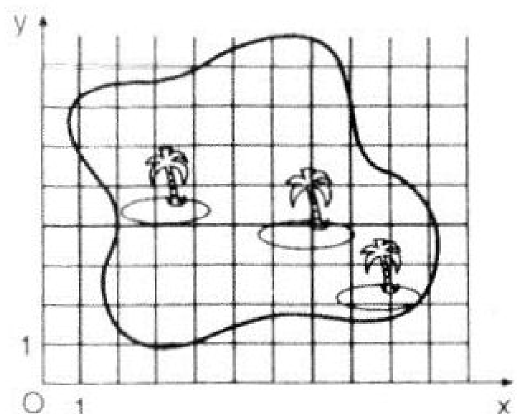
Trên cạnh Ax ta lấy đoạn AB = 2cm, trên cạnh Ay ta lấy đoạn AD = 4cm. Nối B với D.

Trên nửa mặt phẳng bờ BD không chứa điểm A, lấy B làm tâm vẽ cung tròn có bán kính bằng 1,5cm và dùng D làm tâm vẽ cung tròn có bán kính bằng 3cm, chúng cắt nhau tại C. Nối B với C và D với C.

Ta vẽ được tứ giác ABCD như hình đã cho.

5. Đố. Đố em tìm thấy vị trí của "kho báu" trên hình bên, biết rằng kho báu nằm tại giao điểm các đường chéo của tứ giác ABCD, trong đó các đỉnh của tứ giác có tọa độ như sau:

A(3; 2), B(2; 7), C(6; 8), D(8; 5).



Giải

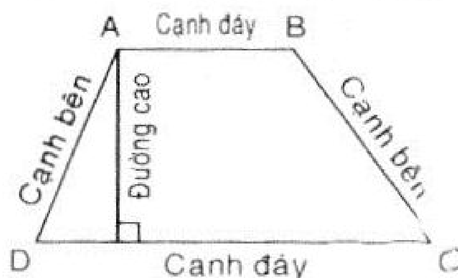
Hướng dẫn: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xác định được tọa độ các điểm A(3; 2), B(2; 7), C(6; 8), D(8; 5). Vẽ tứ giác ABCD và hai đường chéo. Tọa độ giao điểm hai đường chéo chính là vị trí của "kho báu".

Học sinh tự làm.

§2. HÌNH THANG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

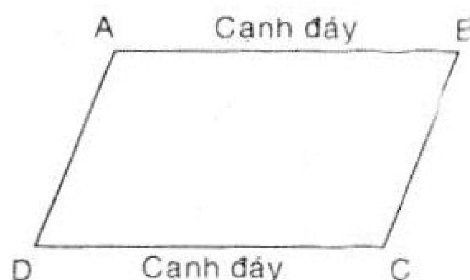
1. *Định nghĩa:* Hình thang là một tứ giác có hai cạnh đối song song.
   - Hai cạnh song song gọi là hai đáy.
   - Hai cạnh còn lại gọi là hai cạnh bên.



2. *Nhận xét:*
   - Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên đó bằng nhau và hai cạnh đáy cũng bằng nhau.

     $\left.\begin{array}{l}\text{ABCD là hình thang}\\ AD // BC\end{array}\right\}$

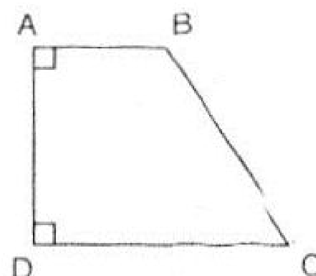
     $\Rightarrow$ AD = BC và AB = CD



   - Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.

     $\left.\begin{array}{l}\text{ABCD là hình thang}\\ AB = CD\end{array}\right\}\Rightarrow AB // BC \text{ và } AD = BC$

3. *Hình thang vuông:*



   a) *Định nghĩa:* Hình thang vuông là hình thang có một cạnh bên vuông góc với hai đáy.

   b) Dấu hiệu nhận biết: Hình thang có một góc vuông là hình thang vuông.

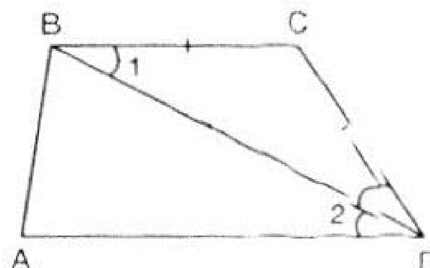
   $\left.\begin{array}{l}\text{ABCD là hình thang}\\ \hat{A} = 90^0\end{array}\right\}\Rightarrow \text{ABCD là hình thang vuông.}$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Tứ giác ABCD có BC = CD và BD là tia phân giác của góc D. Chứng minh rằng ABCD là hình thang.

Giải



- Xét ΔBCD ta có: BC = CD

  Vậy ΔBCD cân tại C.

  $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$

  Theo giả thiết ta có: $\hat{D}_2 = \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_2$

  Hơn nữa $\hat{B}_1$ và $\hat{D}_2$ là hai góc so le trong

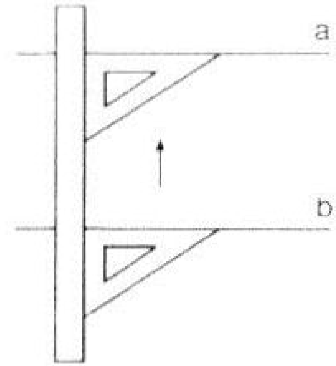
  Vậy BC // AD.

Xét tứ giác ABCD, ta có: BC // AD

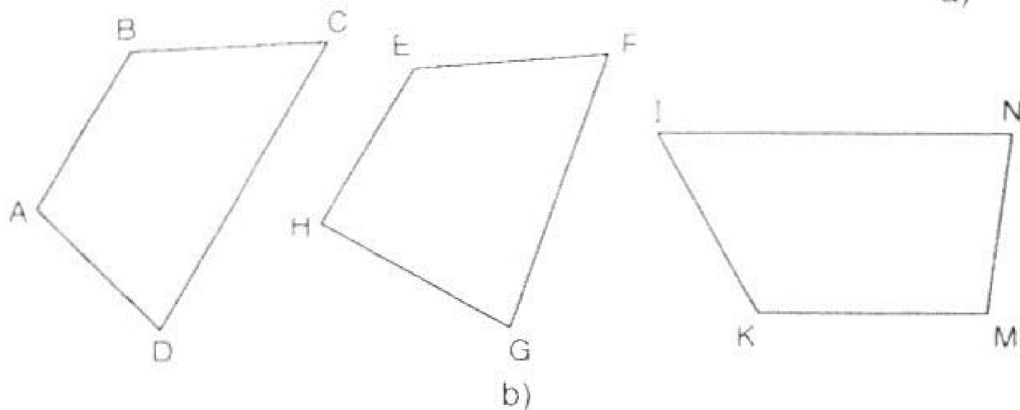
Vậy ABCD là hình thang. (đpcm)

B. Bài tập căn bản

6. Dùng thước và êke, ta có thể kiểm tra được hai đường thẳng có song song với nhau hay không (xem hình a). Trên hình b, có những tứ giác là hình thang, có những tứ giác không là hình thang. Bằng cách nêu trên, hãy kiểm tra xem trong các tứ giác ở hình b, tứ giác nào là hình thang.



a)

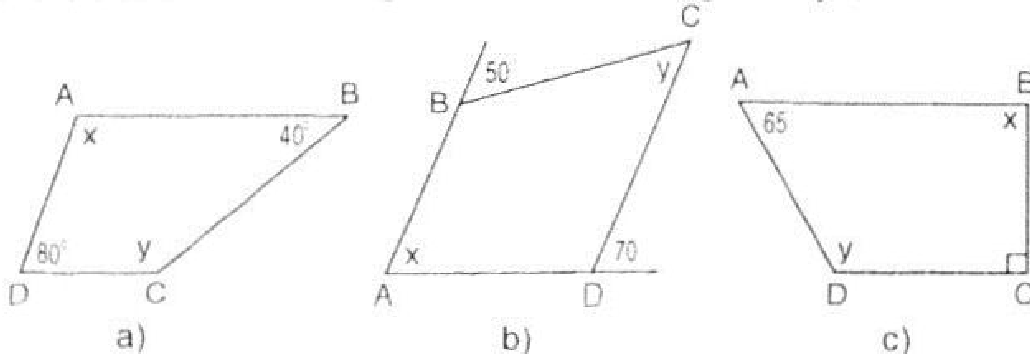


b)

Hướng dẫn

Kết quả kiểm tra được tứ giác ABCD và INMK là hình thang.

7. Tìm x và y trên hình, biết rằng ABCD là hình thang có đáy là AB và CD.



a) b) c)

Giải

- Hình a)

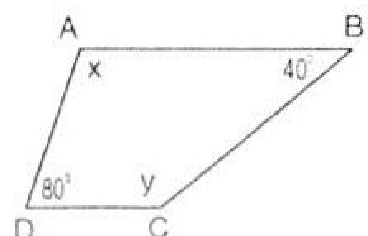
Vì AB // CD (gt)

Đường thẳng AD cắt hai đường thẳng song song AB và CD tạo ra hai góc trong cùng phía bù nhau.

Ta có: $\widehat{A} + \widehat{D} = 180^0$

hay $x + 80^0 = 180^0 \Rightarrow x = 180^0 - 80^0 = 100^0$

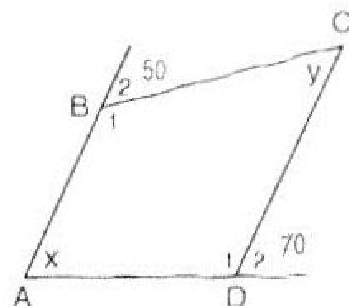
Vậy $x = 100^0$



– Tương tự: $\hat{B} + \hat{C} = 180^0$ hay $40^0 + y = 180^0 \Rightarrow y = 180^0 - 40^0 = 140^0$

Vậy $y = 140^0$

- Hình b)



Áp dụng tính chất: Một đường thẳng cắt hai đường thẳng song song để tìm x, y.

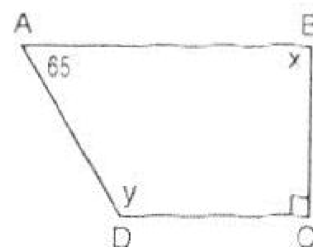
Ta có: $\left.\begin{array}{l} AB // CD \text{ (gt)} \\ \hat{B}_2 \text{ so le trong với } \hat{C} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C} = \hat{B}_2 = 50^0$

Vậy $y = 50^0$

– Ta có: $\left.\begin{array}{l} AB // CD \text{ (gt)} \\ \hat{A} \text{ và } \hat{D}_2 \text{ là hai góc đồng vị} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A} = \hat{D}_2 = 70^0$

Vậy $x = 70^0$

- Hình c)



Ta có $\left.\begin{array}{l} AB // CD \text{ (gt)} \\ \hat{C} \text{ và } \hat{B} \text{ là hai góc trong cùng phía} \end{array}\right\}$

Vậy $\hat{B} + \hat{C} = 180^0 \Rightarrow \hat{B} = 180^0 - \hat{C}$

$\hat{B} = 180^0 - 90^0 = 90^0$ hay $x = 90^0$

Ta có : $\left.\begin{array}{l} AB // CD \text{ (gt)} \\ \hat{A} \text{ và } \hat{D} \text{ là hai góc trong cùng phía} \end{array}\right\}$

Vậy $\hat{A} + \hat{D} = 180^0 \Rightarrow \hat{D} = 180^0 - \hat{A}$

$\hat{D} = 180^0 - 65^0 = 115^0$ hay $y = 115^0$.

8. Hình thang ABCD (AB // CD) có $\hat{A} - \hat{D} = 20^0$, $\hat{B} = 2\hat{C}$. Tính các góc của hình thang.

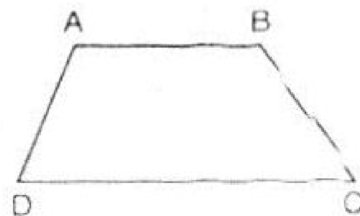
Giải

Vì $\left.\begin{array}{l} AB // CD \text{ (gt)} \\ \hat{A} \text{ và } \hat{D} \text{ là hai góc trong cùng phía} \end{array}\right\}$ suy ra $\hat{A} + \hat{D} = 180^0$

Ta có: $\begin{cases} \hat{A} + \hat{D} = 180^0 \\ \hat{A} - \hat{D} = 20^0 \text{ (gt)} \end{cases} \Rightarrow 2\hat{A} = 200^0 \Rightarrow \hat{A} = 100^0$

Mà $\hat{A} - \hat{D} = 20^0 \Rightarrow \hat{D} = \hat{A} - 20^0 = 100^0 - 20^0 = 80^0$

Tương tự, ta có: $\begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = 180^0 \\ \hat{B} = 2\hat{C} \text{ (gt)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{C} + \hat{B} = 180^0 \\ 2\hat{C} - \hat{B} = 0^0 \end{cases}$

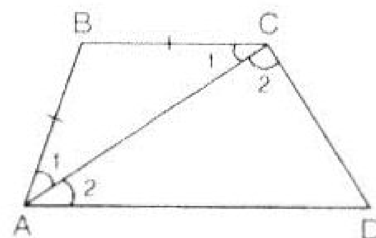


$\Rightarrow 3\hat{C} = 180^0 \Rightarrow \hat{C} = 60^0$

Vì $\hat{B} = 2\hat{C} = 2.60^0 = 120^0$

Vậy: $\hat{A} = 100^0$; $\hat{B} = 120^0$; $\hat{C} = 60^0$; $\hat{D} = 80^0$.

9. Tứ giác ABCD có AB = BC và AC là tia phân giác của góc A. Chứng minh rằng ABCD là hình thang.



Giải

Xét tam giác ABC, ta có BA = BC (gt)

Vậy $\triangle ABC$ cân tại B

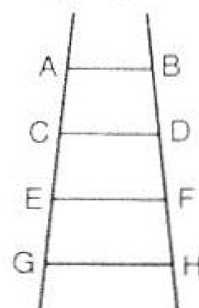
Suy ra $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$

Mà $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (gt) $\Rightarrow \widehat{A}_2 = \widehat{C}_1$.

Vì AC cắt hai đường thẳng BC và AD và tạo ra hai góc so le trong $\widehat{A}_2$ và $\widehat{C}_1$ bằng nhau, suy ra BC // AD.

Trong tứ giác ABCD, ta có: BC // AD. Vậy tứ giác ABCD là hình thang (đpcm).

10. Đố. Hình bên là hình vẽ một chiếc thang. Trên hình vẽ có bao nhiêu hình thang?



Giải

Có tất cả sáu hình thang là:

ABDC, CDFE, EFHG, ABFE, CDHG, ABHG.

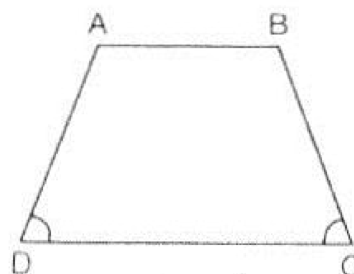
§3. HÌNH THANG CÂN

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Định nghĩa*

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

ABCD là hình thang cân (AB,CD là đáy) $\Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ \widehat{C} = \widehat{D} \end{cases}$



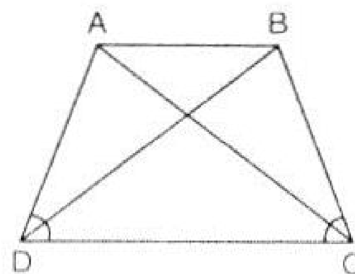
2. *Tính chất:*

a) Định lí 1: Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.

GT	ABCD là hình thang cân (đáy AB//CD)
KL	AD = BC

b) Định lí 2: Trong hình thang cân, hai đường chéo bằng nhau.

GT	ABCD là hình thang (đáy AB,CD)
KL	AC = BD



3. *Dấu hiệu nhận biết hình thang cân:* Để chứng minh một hình thang là cân, ta phải chứng minh hình thang đó có một trong các tính chất sau:

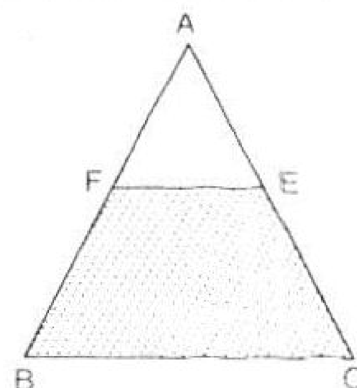
a) Hai góc ở một đáy bằng nhau (định nghĩa)

b) Hai đường chéo bằng nhau.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Nếu các cạnh bên của một tam giác cân bị cắt bởi một đường thẳng song song với cạnh đáy thì tứ giác thu được có phải là hình thang cân hay không? Chứng minh?



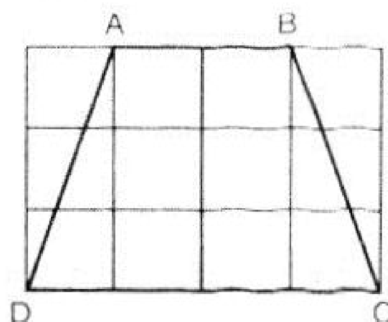
Giải

Nếu cắt các cạnh bên của một tam giác cân bởi một đoạn thẳng song song với cạnh đáy thì tứ giác thu được là hình thang cân vì nó thỏa mãn định nghĩa (hình thang cân).

Ta có BCEF là hình thang cân.

B. Bài tập căn bản

11. Tính độ dài các cạnh của hình thang cân ABCD trên giấy kẻ ô vuông (Hình bên, độ dài của cạnh ô vuông là 1cm).



Giải

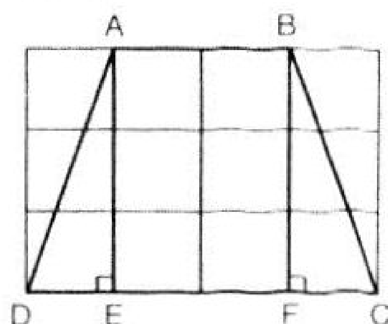
Vì độ dài của cạnh ô vuông là 1cm nên độ dài của cạnh:

$AB = 2$ (cm); $DC = 4$ (cm)

Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông EAD, ta có:

$AD^2 = AE^2 + ED^2 = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10$

$AD^2 = 10 \Rightarrow AD = \sqrt{10}$ (cm)



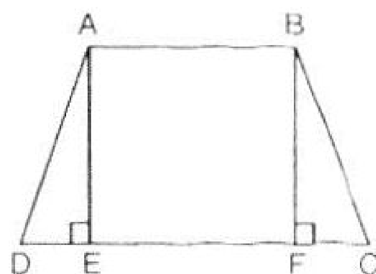
Vì tứ giác ABCD là hình thang cân nên:

$BC = AD = \sqrt{10}$ (cm)

Vậy độ dài các cạnh của hình thang ABCD là:

$AB = 2$cm; $DC = 4$cm; $AD = BC = \sqrt{10}$ cm.

12. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD, AB < CD). Kẻ các đường cao AE, BF của hình thang. Chứng minh rằng DE = CF.



Giải

Vì ABCD là hình thang cân nên ta có:

$AD = BC$; $\hat{D} = \hat{C}$

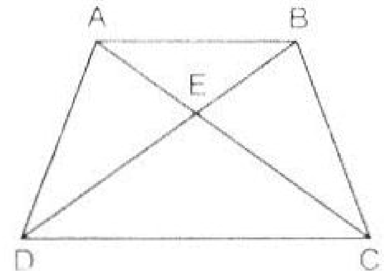
Xét hai tam giác vuông EAD và FBC ta có:

$AD = BC$; $\hat{D} = \hat{C}$

Vậy $\Delta EAD = \Delta FBC$ (ch.gn). Suy ra $DE = CF$ (dpcm).

13. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD), E là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng EA = EB, EC = ED.

Giải



Vì ABCD là hình thang cân nên ta có:

$AD = BC$; $\hat{A} = \hat{B}$; $\hat{C} = \hat{D}$

- Xét hai tam giác ADC và BCD, ta có:

$AD = BC$

$\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$

DC : cạnh chung

Vậy $\Delta ADC = \Delta BCD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{DBC}$ (1)

- Xét hai tam giác DAB và CBA, ta có:

$DA = CB$

$\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$

AB : cạnh chung

Vậy $\Delta DAB = \Delta CBA$

$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{BCA}$ (2)

- Xét hai tam giác EAD và EBC, ta có:

$\widehat{EAD} = \widehat{EBC}$ (do (1))

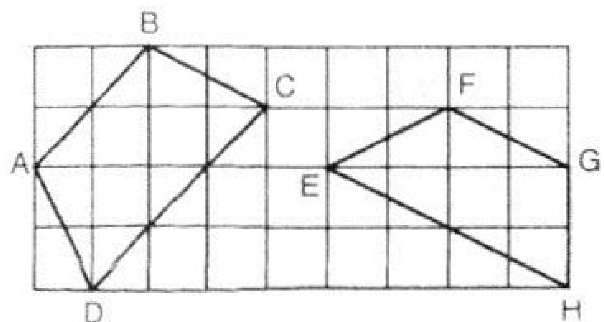
$AD = BC$ (gt)

$\widehat{ADE} = \widehat{BCE}$ (do (2))

Vậy $\Delta EAD = \Delta EBC$ (g.c.g)

Suy ra: EA = EB; EC = ED (dpcm).

14. Đố. Cho tứ giác ABCD và EFGH trên giấy kẻ ô vuông (hình bên), tứ giác nào là hình thang cân? Vì sao?



Giải

Quan sát và nhận xét ta thấy:

- Tứ giác ABCD là hình thang cân.
- Tứ giác EFGH là hình thang nhưng không là hình thang cân vì EF > GH.

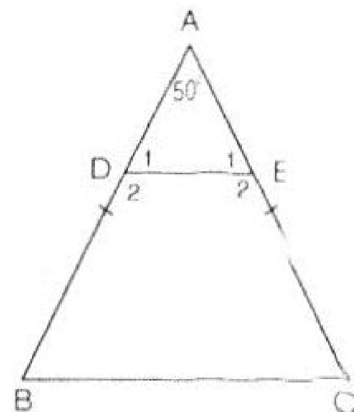
15. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh bên AB, AC lấy theo thứ tự các điểm D và E sao cho AD = AE.

a) Chứng minh rằng BDEC là hình thang cân.

b) Tính các góc của hình thang cân đó, biết rằng $\hat{A} = 50^0$

Giải

a) Chứng minh BDEC là hình thang cân:



– Vì ΔABC cân tại A nên: $\hat{B} = \dfrac{180^0 - \hat{A}}{2}$ (1)

và $\hat{B} = \hat{C}$ (*)

– Vì ΔADE cân tại A (vì AD = AE) nên:

$$\hat{D}_1 = \frac{180^0 - \hat{A}}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{D}_1 = \hat{B}$

Hơn nữa $\hat{D}_1$ và $\hat{B}$ là 2 góc đồng vị. Vậy DE // BC.

Suy ra tứ giác BDEC là hình thang (**)

– Từ (*) và (**) ta suy ra tứ giác BDEC là hình thang cân.

b) Tính các góc của hình thang:

– Thay $\hat{A} = 50^0$ vào (1) ta có:

$$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180^0 - \hat{A}}{2} = \frac{180^0 - 50^0}{2} = 65^0$$

Vì BDEC là hình thang cân nên:

$$\hat{B} + \hat{C} + \hat{E}_2 + \hat{D}_2 = 360^0 \text{ hay } 2\hat{B} + 2\hat{E}_2 = 360^0$$

$$\Rightarrow \quad \hat{E}_2 = \frac{360^0 - 2\hat{B}}{2} = \frac{360^0 - 130^0}{2} = 115^0$$

Vậy $\hat{B} = \hat{C} = 65^0$; $\hat{D}_2 = \hat{E}_2 = 115^0$.

Luyện tập

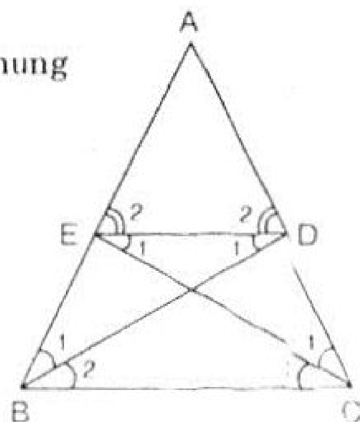
16. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường phân giác BD, CE ($D \in AC$, $E \in AB$). Chứng minh rằng BEDC là hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên.

Giải

* Chứng minh BEDC là hình thang cân.

Vì ΔABC cân tại A nên ta có: AB = AC

$$\hat{B} = \hat{C} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{C}_1 = \hat{C}_2$$



– Xét hai tam giác ADB và AEC, ta có: $\hat{A}$: góc chung

AB = AC

$\hat{C}_1 = \hat{B}_1$

Vậy $\Delta ADB = \Delta AEC$ (g-c-g). Suy ra AE = AD.

– Xét ΔAED, ta có: AE = AD

Vậy ΔAED cân ở A. Suy ra $\hat{E}_2 = \hat{D}_2$

– Xét ΔAED và ΔABC, ta có:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{D}_2 + \hat{E}_2 = 180^\circ$

$\Rightarrow \quad \hat{B} + \hat{C} = \hat{D}_2 + \hat{E}_2$ hay $2\hat{B} = 2\hat{E}_2 \Rightarrow \hat{B} = \hat{E}_2$

Hai đường thẳng BC và ED bị cắt bởi đường thẳng AB tạo ra hai góc đồng vị bằng nhau ($\hat{B} = \hat{E}_2$). Vậy BC // ED. Suy ra tứ giác BEDC là hình thang.

Trong hình thang BEDC có $\hat{B} = \hat{C}$ (gt). Vậy BEDC là hình thang cân.

- Chứng minh ED = EB

Vì ED // BC (theo chứng minh trên)

$\hat{D}_1$ so le với $\hat{B}_2$ mà $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$

Suy ra $\hat{D}_1 = \hat{B}_1$

Xét ΔEBD ta có: $\hat{D}_1 = \hat{B}_1$

Vậy ΔEBD cân tại E. Suy ra ED = EB (đpcm).

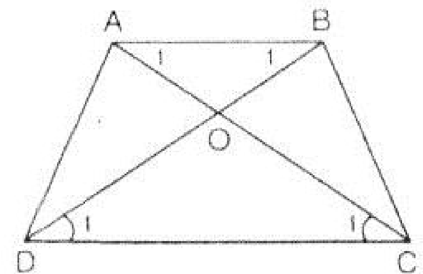
17. Hình thang ABCD (AB // CD) có $\widehat{ACD} = \widehat{BDC}$. Chứng minh rằng ABCD là hình thang cân.

Giải

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD

Xét ΔDOC, ta có: $\hat{D}_1 = \hat{C}_1$

Vậy ΔDOC cân tại O $\Rightarrow$ OD = OC (1)



Vì AB // CD (gt)
$\hat{D}_1$ so le trong với $\hat{B}_1$ $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1$

Vì AB // CD (gt)
$\hat{A}_1$ so le trong với $\hat{C}_1$ $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$

Mà $\hat{C}_1 = \hat{D}_1$ (gt) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{B}_1$

Vậy ΔOAB cân ở O. Suy ra OA = OB (2)

Từ (1) và (2) ta có: OA + OC = OB + OD $\Rightarrow$ AC = BD

Hình thang ABCD có đường chéo AC = BD. Vậy ABCD là hình thang cân.

18. Chứng minh định lí "Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân" qua bài toán sau:

Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AC = BD. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC, cắt đường thẳng DC tại E. Chứng minh rằng:

a) ΔBDE là tam giác cân.

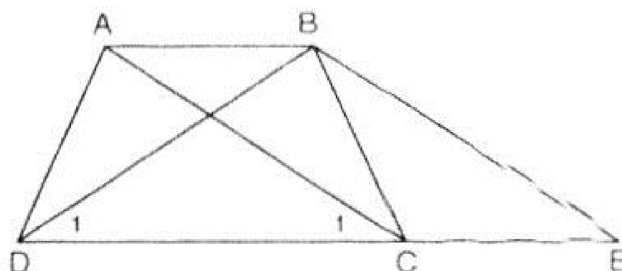
b) ΔACD = ΔBDC.

c) Hình thang ABCD là hình thang cân.

Giải

a) Vì AB // DC (gt) $\Rightarrow$ AB // DE và AC // BE (gt)

Do hai đoạn thẳng song song (AB // DE) chắn bởi hai đường thẳng song song (AC // BE) $\Rightarrow$ AC = BE



Mà AC = BD (gt)

Suy ra BD = BE

Xét ΔBDE, ta có: BD = BE

Vậy ΔBDE cân tại B (đpcm)

b) Chứng minh ΔACD = ΔBCD

Vì ΔBDE cân tại B nên ta có: $\widehat{D_1} = \widehat{E}$ (1)

Vì AC // BE (gt) và $\widehat{E}$ và $\widehat{C_1}$ là hai góc đồng vị $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{E}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{D_1} = \widehat{C_1}$

Xét hai tam giác ACD và BDC ta có:

AC = BD (gt) ; $\widehat{C_1} = \widehat{D_1}$ (cmt) ; DC : cạnh chung

Vậy ΔACD = ΔBDC (đpcm)

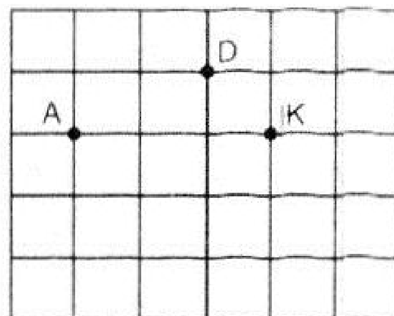
c) Chứng minh ABCD là hình thang cân:

Vì ABCD là hình thang (gt)

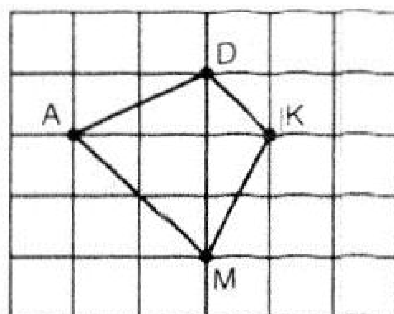
Và $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$ (vì ΔACD = ΔBDC)

Vậy ABCD là hình thang cân (đpcm).

19. Đố. Cho ba điểm A, D, K trên giấy kẻ ô vuông (hình bên). Hãy tìm điểm thứ tư M là giao điểm của các dòng kẻ sao cho nó cùng với ba điểm đã cho là bốn đỉnh của một hình thang cân.



Giải



Học sinh tự làm.

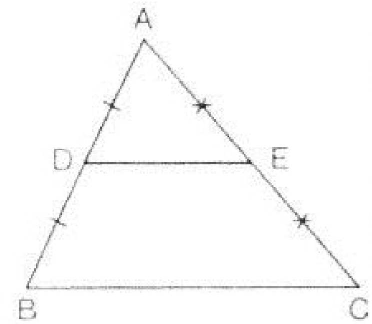
Gợi ý: Điểm được xác định như hình vẽ bên. Em hãy trình bày cách xác định vị trí điểm M.

§4. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA HÌNH THANG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Đường trung bình của tam giác*

a) Định nghĩa: Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

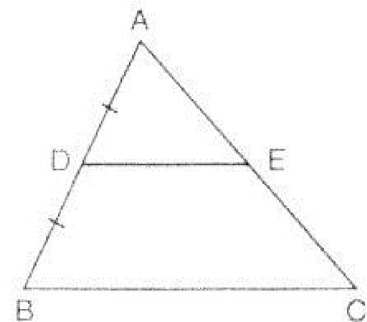


DA = DB
EA = EC

⇒ DE là đường trung bình của tam giác ABC.

b) Các định lý

- Định lí 1: Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.



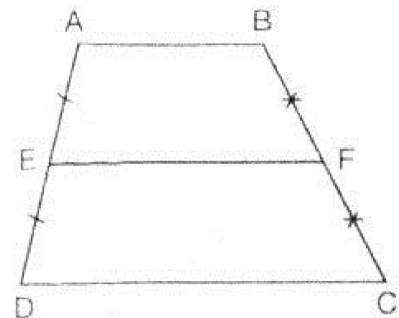
GT	ΔABC DA = DB; DE // BC
KL	EA = EC

- Định lí 2: Đường trung bình của hai tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

GT	ΔABC DA = DB; EA = EC
KL	DE // BC; DE = $\frac{1}{2}$BC

2. *Đường trung bình của hình thang*

a) Định nghĩa: Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm của hai cạnh bên.



EA = ED
FB = FC

⇒ EF là đường trung bình của hình thang.

b) Các định lí

- Định lí 1: Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.

GT	ABCD là hình thang (đáy AB, CD) EA = ED; EF // AB // DC
KL	FB = FC

- *Định lí 2:* Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

GT	ABCD là hình thang (đáy AB,CD) EA = ED;FB = FC
KL	EF // AB;EF // CD;EF = $\frac{AB + CD}{2}$

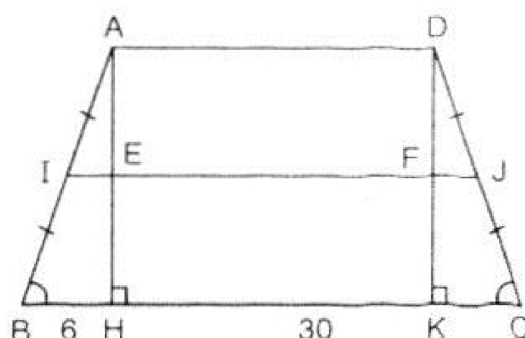
II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Đường cao xuất phát từ đỉnh góc tù của một hình thang cân chia đáy lớn thành hai đoạn thẳng có độ dài 6cm và 30cm. Tính độ dài đường trung bình của hình thang đó.

Giải

GT	ABCD : hình thang cân AH, DK : đường cao BH = 6cm; HC = 30cm
KL	IJ = ?



- Xét hai tam giác vuông HBA và KCD ta có:

$$\left.\begin{array}{l} AB = CD \\ \hat{B} = \hat{C} \end{array}\right\} \text{Vậy } \Delta HBA = \Delta KCD$$

Suy ra: BH = CK = 6cm

Ta có: HK + KC = HC ⇒ HK = HC − KC

HK = 30 − 6 = 24 cm

Suy ra: AD = HK = 24cm (do t/c đoạn chắn).

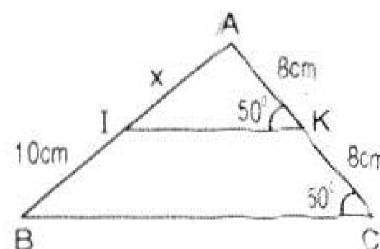
- Gọi IJ là đường trung bình của hình thang, ta có:

$$IJ = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(24 + 36) = 30 \text{ (cm)}$$

Vậy IJ = 30cm.

B. Bài tập căn bản

20. Tính x trên hình bên.



Giải

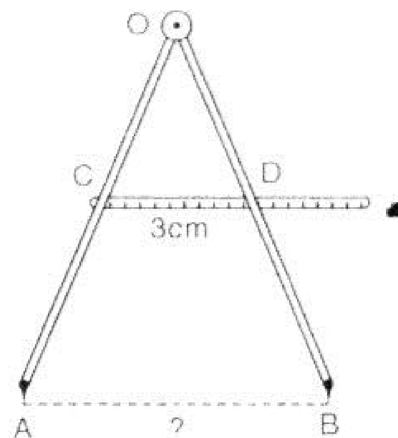
Ta có KA = KC = 8 (1)

Ta có đường thẳng AC cắt hai đoạn thẳng KI và CB tạo thành hai góc đồng vị $\hat{K} = \hat{C} = 50^0$. Suy ra KI // CB (2)

Từ (1) và (2) ta có: Đường thẳng KI đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai, vậy KI đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.

Do đó IA = IB hay x = 10cm.

21. Tính khoảng cách AB giữa hai mũi của compa trên hình bên, biết rằng C là trung điểm của OA, D là trung điểm của OB và CD = 3cm.



Giải

Xét tam giác OAB, ta có: $\left.\begin{matrix} CO = CA \\ DO = BD \end{matrix}\right|$

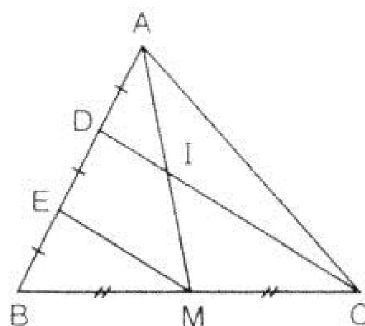
Vậy CD là đường trung bình của ΔOAB

Suy ra $CD = \frac{1}{2}AB$ hay $AB = 2CD = 2.3 = 6$ (cm)

Vậy AB = 6cm.

22. Cho hình bên.

Chứng minh rằng AI = IM.



Giải

Trong ΔBCD ta có: $\left.\begin{matrix} ED = EB \text{ (gt)} \\ MB = MC \text{ (gt)} \end{matrix}\right|$

Vậy EM là đường trung bình của ΔBDC.

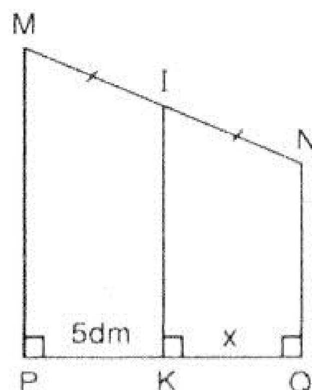
Suy ra EM // DC hay EM // DI

Trong ΔAEM, ta có: DA = DE (gt)

DI // EM (cmt)

Suy ra DI đi qua trung điểm I của AM hay AI = IM (đpcm).

23. Tính giá trị x trên hình bên.



Giải

- Xét tứ giác MNQP, ta có: $\left.\begin{matrix} MP \perp PQ \\ NQ \perp PQ \end{matrix}\right\} \Rightarrow MP \,//\, NQ$

  Vậy MNQP là hình thang

- Trong hình thang MNQP, ta có: IM = IN

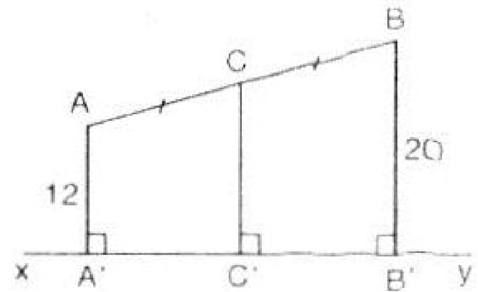
  $IK \perp PQ \Rightarrow IK \,//\, MP \,//\, NQ$

  Vậy IK là đường trung bình của hình thang MNQP.

  Suy ra K là trung điểm của PQ hay KQ = KP = 5dm.

24. Hai điểm A và B thuộc một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng xy. Khoảng cách từ điểm A đến xy bằng 12cm, khoảng cách từ điểm B đến xy bằng 20cm. Tính khoảng cách từ trung điểm C của AB đến xy.

Giải



Theo đề bài ta có: $AA' \perp xy$

$BB' \perp xy$

$CC' \perp xy$

Vậy $CC' // AA' // BB'$

$\Rightarrow$ Tứ giác AA'B'B là hình thang.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} CA = CB \\ CC' // AA' // BB' \end{array}\right\} \Rightarrow C'A' = C'B'$

Vậy CC' là đường trung bình của hình thang AA'B'B.

Suy ra $CC' = \dfrac{AA' + BB'}{2} = \dfrac{12 + 20}{2} = 16$ (cm)

Vậy CC' = 16 cm.

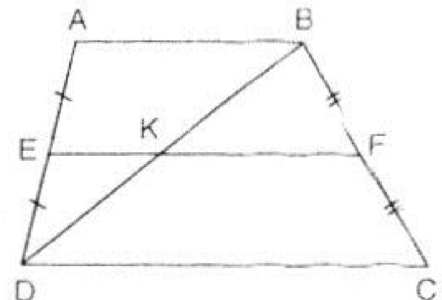
25. Hình thang ABCD có đáy AB, CD. Gọi E, F, K theo thứ tự là trung điểm AD, BC, BD. Chứng minh ba điểm E, K, F thẳng hàng.

Giải

– Trong hình thang ABCD, ta có: $\left.\begin{array}{l} EA = ED \\ FB = FC \end{array}\right\}$

Vậy EF là đường trung bình của hình thang ABCD.

Suy ra EF // AB và EF // DC (1)



Trong ΔDAB, ta có: $\left.\begin{array}{l} EA = ED \\ KB = KD \end{array}\right\}$

Vậy EK là đường trung bình của ΔDAB

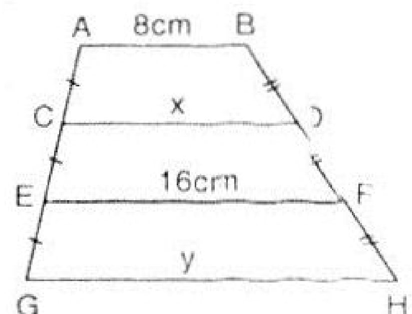
Suy ra EK // AB (2)

Từ (1) và (2), ta có: $\left.\begin{array}{l} EF // AB \\ EK // AB \end{array}\right\}$

Vậy EF ≡ EK hay ba điểm E, K, F thẳng hàng (đpcm).

Luyện tập

26. Tính x, y trên hình bên, trong đó AB // CD // EF // GH.



Giải

– Theo giả thiết của bài toán được chú thích trong hình vẽ, ta có CD là đường trung bình của hình thang AEFB.

Do đó $CD = \dfrac{AB + EF}{2}$ hay $CD = \dfrac{8 + 16}{2} = 12$

Vậy CD = 12cm

Tương tự, EF là đường trung bình của hình thang CGHD, ta có:

$$EF = \frac{CD + GH}{2} \text{ hay } 16 = \frac{12 + y}{2}$$

$$\Rightarrow y = 16.2 - 12 = 32 - 12 = 20$$

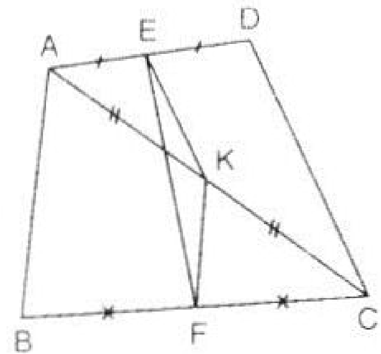
Vậy y = 20cm.

27. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, K theo thứ tự là trung điểm của AD, BC, AC.

a) So sánh các độ dài EK và CD, KF và AB.

b) Chứng minh rằng $EF \le \frac{AB + CD}{2}$.

Giải



a) So sánh EK và CD.

Theo giả thiết, ta có EA = ED

KA = KC

Vậy EK là đường trung bình của tam giác ACD.

Suy ra $EK = \frac{CD}{2}$.

- So sánh KF và AB.

Tương tự KF là đường trung bình của tam giác CAB;

Suy ra $KF = \frac{AB}{2}$.

b) Chứng minh $EF \le \frac{AB + CD}{2}$

Áp dụng tính chất bất đẳng thức trong tam giác EFK, ta có:

$$EF \le EK + KF \text{ hay } EF \le \frac{CD}{2} + \frac{AB}{2}$$

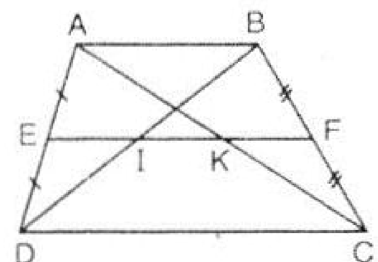
Vậy $EF \le \frac{AB + CD}{2}$ (đpcm).

28. Cho hình thang ABCD (AB // CD). E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC. Đường thẳng EF cắt BD ở I, cắt AC ở K.

a) Chứng minh rằng AK = KC, BI = ID.

b) Cho AB = 6cm, CD = 10cm. Tính các độ dài EI, KF, IK.

Giải



a) Chứng minh AK = KC; BI = ID

Xét tứ giác ABCD, ta có: FB = FC (gt)

EA = ED (gt)

Vậy EF là đường trung bình của hình thang ABCD.

⇒ EF // AB và EF // CD.

- Xét ΔCBA, ta có: FB = FC (gt)

$FK // AB$ (do $EF // AB$).

Vậy FK đi qua trung điểm của cạnh AC.

Suy ra AK = KHOẢNG CÁCH.

– Tương tự, trong ΔADB ta có: $EA = ED$ (gt)

$EI // BA$ (do $EF // AB$)

Vậy EI đi qua trung điểm của cạnh BD. Suy ra $BI = ID$ (đpcm)

b) – Xét ΔDAB, ta có: $\left.\begin{matrix} EA = ED \\ ID = IB \end{matrix}\right\}$

Vậy EI là đường trung bình của ΔDAB. Suy ra $EI = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3cm$.

– Tương tự, KF là đường trung bình của ΔABC

Suy ra $KF = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3cm$

Vì EF là đường trung bình của hình thang ABCD (theo chứng minh trên), ta có: $EF = \frac{AB + CD}{2} = \frac{6 + 10}{2} = 8cm$

Mà $IK = EF - (EI + KF) = 8 - (3 + 3) = 2cm$

Vậy $IK = 2cm$.

§5. DỰNG HÌNH THANG (BẰNG THƯỚC VÀ COMPA)

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

A. Các bước giải một bài toán dựng hình

1. *Phân tích:* Giả sử đã dựng được hình thỏa mãn tất cả các yêu cầu của bài toán. Căn cứ vào đó xét mối liên hệ giữa các bộ phận, các yếu tố của hình để định ra nên dựng bộ phận hoặc yếu tố nào của hình trước sao cho từ đó có thể dựng được hình cần dựng.
2. *Cách dựng:* Dựa vào bước phân tích ở trên, lần lượt nêu rõ các phép dựng và thể hiện các phép dựng trên hình vẽ.
3. *Chứng minh:* Bằng lập luận, chứng tỏ rằng hình đã dựng thỏa mãn các yêu cầu của bài toán.
4. *Biện luận:* Với điều kiện nào của giả thiết thì các phép dựng đã nêu ở trên thực hiện được? Khi đó có bao nhiêu nghiệm hình?

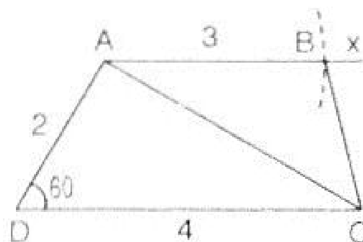
B. Chú ý

Để đơn giản đối với các bài toán dựng hình ở lớp 8, chỉ yêu cầu học sinh trình bày hai phần: Cách dựng và chứng minh.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Dựng hình thang ABCD (AB // CD) biết đáy lớn CD = 4cm, đáy nhỏ AB = 3cm, cạnh bên AD = 2cm và $\hat{D} = 60^0$



Giải

1. *Cách dựng:*

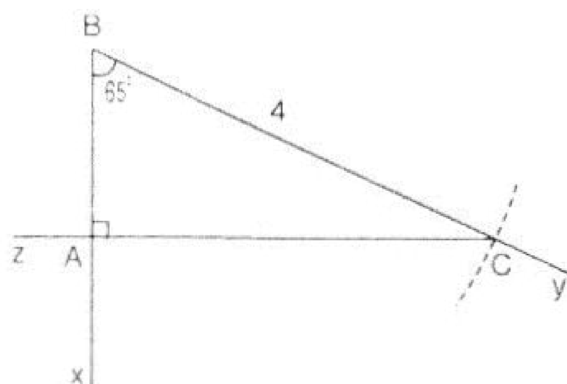
- Dựng ΔACD có $\hat{D} = 60^0$, CD = 4cm, DA = 2cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ DC ta dựng tia Ax // DC.
- Dựng đường tròn tâm A, bán kính 3cm, nó cắt tia Ax tại B. Kẻ đoạn thẳng BC.

2. *Chứng minh:* Thật vậy, tứ giác ABCD là hình thang vì AB // CD. Hình thang ABCD có CD = 4cm, $\hat{D} = 60^0$, AD = 2cm, AB = 3cm nên thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

B. Bài tập căn bản

29. Dựng tam giác ABC vuông tại A, biết cạnh huyền BC = 4cm, góc nhọn $\hat{B} = 65^0$.

Giải



* *Cách dựng:*

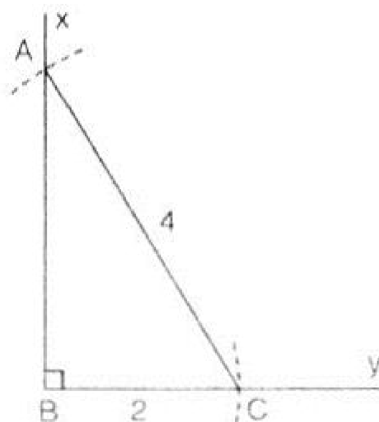
- Dựng góc $\widehat{xBy} = 65^0$. Dựng đường tròn tâm B, bán kính 4cm, cắt tia By tại C.
- Từ C dựng tia Cz vuông góc với tia Bx tại A.

Ta được tam giác vuông ABC là tam giác cần dựng.

* *Chứng minh:* Thật vậy, ΔABC là tam giác vuông tại A có góc $\hat{B} = 65^0$ và cạnh huyền BC = 4cm thỏa mãn yêu cầu của bài toán đã cho.

30. Dựng tam giác ABC vuông tại B, biết cạnh huyền AC = 4cm, cạnh góc vuông BC = 2cm.

Giải



* *Cách dựng:*

- Trước hết ta dựng góc $\widehat{xBy}$ vuông tại B, dựng đường tròn tâm B có bán kính bằng 2cm, cắt tia By tại C.
- Lấy C làm tâm, dựng đường tròn tâm C, bán kính 4cm, cắt tia Bx tại A.

Vậy ΔABC là tam giác vuông cần dựng.

* *Chứng minh:* Thật vậy, ΔABC là tam giác vuông tại B, có BC = 2cm và cạnh huyền AC = 4cm thỏa mãn yêu cầu của bài toán đã cho.

31. Dựng hình thang ABCD (AB // CD), biết AB = AD = 2cm, AC = DC = 4cm.

Giải

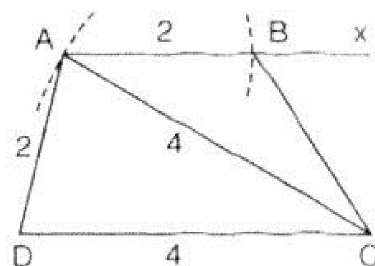
* *Cách dựng:*

- Dựng tam giác DAC biết độ dài ba cạnh lần lượt là:

  AD = 2cm; AC = CD = 4cm

  Dựng tia Ax // DC.

  Dựng đường tròn tâm A bán kính 2cm, nó cắt tia Ax tại B. Nối B với C. Ta được hình thang ABCD là hình thang cần dựng.



* *Chứng minh:*

Tứ giác ABCD là hình thang vì AB // CD

Hình thang ABCD có AB = AD = 2cm, AC = DC = 4cm nên thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

32. Hãy dựng một góc bằng 30^0.

Giải

* *Cách dựng:*

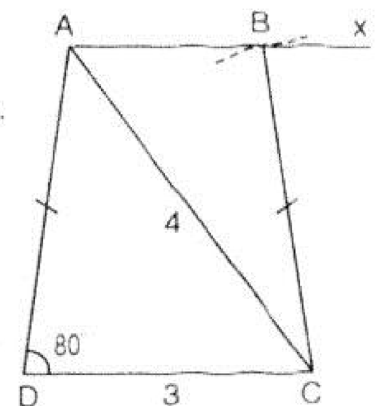
- Trước hết ta dựng tam giác đều với ba cạnh có độ dài bất kỳ.
- Dựng đường phân giác của một góc bất kỳ (Ví dụ: Dựng đường phân giác của góc ABC)

  Ta được góc $\widehat{ABx} = 30^0$ là góc cần dựng.

* *Chứng minh:* Thật vậy, tam giác ABC là tam giác đều nên $\widehat{ABC} = 60^0$ và Bx là đường phân giác của góc ABC nên $\widehat{ABx} = 30^0$ là góc phải dựng.

33. Dựng hình thang cân ABCD, biết đáy CD = 3cm, đường chéo AC = 4cm, $\hat{D} = 80^0$.

Giải



* *Cách dựng:*

- Dựng ΔADC có $\hat{D} = 80^0$, DC = 3cm và CA = 4cm.
- Trên nửa mặt phẳng bờ DC, dựng tia Ax song song với tia DC.
- Dựng đường tròn tâm C bán kính AD nó cắt tia Ax tại B. Nối BC.

  Ta được hình thang ABCD là hình thang cân phải dựng.

* *Chứng minh:* Thật vậy, tứ giác ABCD là hình thang và AB // CD. Hình thang ABCD có $\hat{D} = 80^0$, DC = 3cm; CA = 4cm và AD = BC nên thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

34. Dựng hình thang ABCD, biết $\hat{D} = 90^0$, đáy CD = 3cm, cạnh bên AD = 2cm, cạnh bên BC = 3cm.

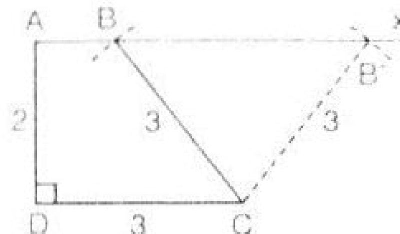
Giải

- *Cách dựng:*

Dựng tam giác ADC vuông tại D, có DA = 2cm, DC = 3cm.

Trên nửa mặt phẳng bờ DC, dựng tia Ax // DC.

Dựng đường tròn tâm C bán kính 3cm cắt tia Ax tại B và B'. Nối B với C. Ta được hình thang vuông ABCD hoặc AB'CD cần phải dựng.



- *Chứng minh:* Thật vậy, tứ giác ABCD là hình thang vì AB // CD. Hình thang ABCD có $\hat{D} = 90^0$, DC = BC = 3cm, DA = 2cm nên thỏa mãn đúng yêu cầu của đề bài đã cho.

Tương tự hình thang AB'CD cũng thoả mãn yêu cầu của đề bài.

§6. ĐỐI XỨNG TRỤC

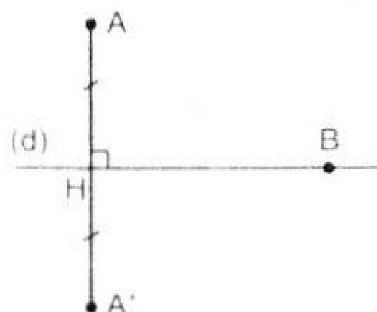
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

A. Hai hình đối xứng qua một đường thẳng

1. *Hai điểm đối xứng qua một đường thẳng*

Hai điểm đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu d là đường trung trực của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

(Nếu điểm B nằm trên đường thẳng d thì điểm đối xứng với B qua đường thẳng d cũng là điểm B).



2. *Hai hình đối xứng qua một đường thẳng*

a) *Định nghĩa:* Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua đường thẳng d nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng qua d với một điểm thuộc hình kia và ngược lại.

Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hai hình đó.

b) *Tính chất:* Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng nhau qua một đường thẳng thì chúng bằng nhau.

B. Hình có trục đối xứng

Trục đối xứng qua một hình:

a) *Định nghĩa:* Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình F nếu điểm đối xứng qua d của mỗi điểm thuộc hình F cũng thuộc hình F.

b) *Tính chất:* Hình thang cân nhận đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy làm trục đối xứng.

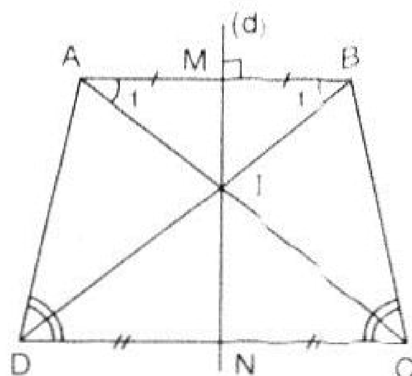
II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho hình thang cân ABCD. Gọi d là đường thẳng đi qua trung điểm của hai đáy hình thang. Chứng minh rằng hai đường chéo cắt nhau tại một điểm trên d.

Giải

GT	$\hat{A} = \hat{B}$; AC = BD; AD = BC MA = MB; NC = ND
KL	AC và BD cắt d tại I



Đường thẳng (d) đi qua trung điểm M, N của hai cạnh đáy AB, DC của hình thang cân ABCD nên (d) là trục đối xứng.

⇒ d là đường trung trực của AB.

(d ⊥ AB và MA = MB).

Giả sử AC cắt BD tại I. Xét hai tam giác: ΔABD và ΔBAC, ta có:

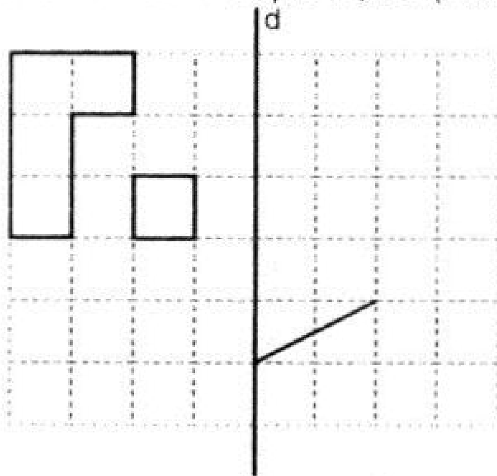
AB chung
AD = BC (gt)
BD = AC (gt)

Vậy ΔABD = ΔBAC ⇒ $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$.

Vậy ΔIAB cân tại I ⇒ IA = IB hay I nằm trên đường trung trực (d) của đoạn AB.

B. Bài tập căn bản

35. Vẽ hình đối xứng với các hình đã cho qua trục d (hình dưới).



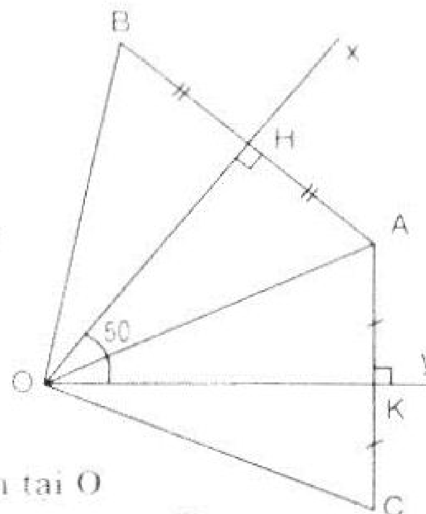
Học sinh tự làm.

36. Cho góc xOy có số đo 50^0, điểm A nằm trong góc đó. Vẽ điểm E đối xứng với A qua Ox, vẽ điểm C đối xứng với A qua Oy.

a) So sánh các độ dài OB và OC.

b) Tính số đo góc BOC.

Giải



a. So sánh độ dài OB, OC:

Vì B là điểm đối xứng của A qua Ox là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

Suy ra OA = OB (1)

Vì C là điểm đối xứng của A qua Oy nên Oy là đường trung trực của đoạn thẳng AC.

Suy ra OA = OC (2)

Từ (1) và (2), ta có: OB = OC

b. Tính số đo góc BOC:

Xét ΔOAB, ta có: OA = OB. Vậy ΔOAB cân tại O

Suy ra đường cao OH cũng là đường phân giác của $\widehat{AOB}$.

Do đó: $\widehat{BOA} = 2\widehat{HOA}$ (3)

Xét ΔAOC ta có: OA = OC. Vậy ΔAOC cân tại O.

Suy ra đường cao OK cũng là đường phân giác góc $\widehat{AOC}$

Do đó: $\widehat{AOC} = 2\widehat{AOK}$ (4)

Cộng (3) và (4) vế theo vế ta có:

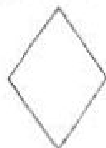
$\widehat{BOA} + \widehat{AOC} = 2\widehat{HOA} + 2\widehat{AOK}$

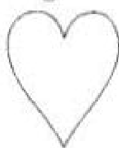
hay $\widehat{BOC} = 2(\widehat{HOA} + \widehat{AOK})$

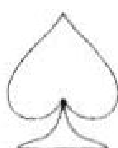
hay $\widehat{BOC} = 2\,\widehat{xOy} = 2.50^\circ = 100^\circ$

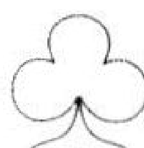
Vậy $\widehat{BOC} = 100^\circ$.

37 Tìm các hình có trục đối xứng trên hình bên dưới.

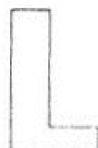

a)


b)

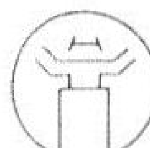

c)


d)


e)


g)


h)


i)

Gợi ý

Hình a), b), c), d) e), h), i) có trục đối xứng.

Giải thích: Học sinh tự làm.

38 Thực hành: cắt một tấm bìa hình tam giác cân, một tấm bìa hình thang cân. Hãy cho biết đường nào là trục đối xứng của mỗi hình, sau đó gấp mỗi tấm bìa để kiểm tra lại điều đó.

Hướng dẫn: Học sinh tự làm

Gợi ý

- Đối với tam giác ABC cân tại A, trục đối xứng là đường cao AH (H ∈ BC).
- Đối với hình thang cân: Trục đối xứng là đường thẳng nối trung điểm hai cạnh đáy của hình thang.

Luyện tập

39. a) Cho hai điểm A, B thuộc cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng d (hình bên). Gọi C là điểm đối xứng với A qua d. Gọi D là giao điểm của đường thẳng d và đoạn thẳng BC. Gọi E là điểm bất kỳ của đường thẳng d (E khác D). Chứng minh rằng AD + DB < AE + EB.



b) Bạn Tú đang ở vị trí A, cần đến bờ sông d lấy nước rồi đi đến vị trí B (hình vẽ). Con đường ngắn nhất mà bạn Tú nên đi là con đường nào?

Giải

a) Gọi B' là điểm đối xứng của B qua đường thẳng (d).

Ta có: DB = DB'

Khi đó: AD + DB = AD + DB' = AB' (1)

(Vì hình đối xứng của đoạn thẳng CDB qua (d) là đoạn thẳng ADB' nên ADB' thẳng hàng và AD + DB' = AB').

Vì (d) là đường trung trực của BB' nên ta có: EB = EB'

⇒ AE + EB = AE + EB' (Do cộng 2 vế với AE)

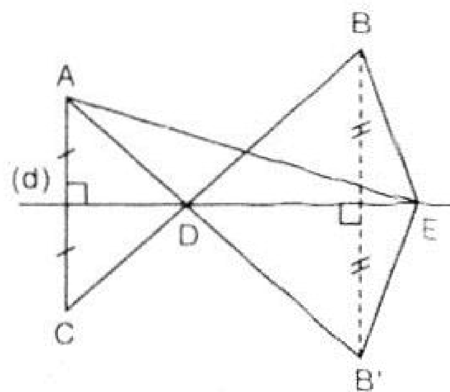
Áp dụng tính chất bất đẳng thức trong ΔAEB', ta có:

AB' < AE + EB'

hay AD + DB < AE + EB (do (1) và (2))

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Theo câu a) AD + DB < AE + EB. Điều này chứng tỏ rằng AD + DE là nhỏ nhất. Vậy bạn Tú muốn đi đến bờ sông lấy nước rồi đến B, con đường ngắn nhất mà bạn Tú đi là từ A đi thẳng đến D, lấy nước rồi đi thẳng đến B (như hình vẽ).



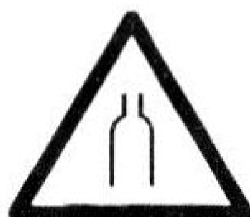
40. Trong các biển báo giao thông sau đây, biển nào có trục đối xứng?

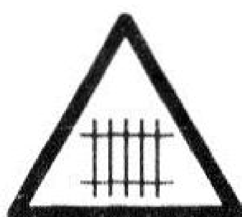
a) Biển nguy hiểm: đường hẹp hai bên (hình a);

b) Biển nguy hiểm: đường giao với đường sắt có rào chắn (hình b);

c) Biển nguy hiểm: đường ưu tiên gặp đường không ưu tiên bên phải (hình c);

d) Biển nguy hiểm khác (hình d)


a)


b)


c)


d)

Gợi ý

Câu a), b), c): đúng

Câu d): sai

Vì một đoạn thẳng có 2 trục đối xứng: đường trung trực của nó và chính nó.

41. Các câu sau đúng hay sai?

a) Nếu ba điểm thẳng hàng thì ba điểm đối xứng với chúng qua một trục cũng thẳng hàng.

b) Hai tam giác đối xứng với nhau qua một trục thì có chu vi bằng nhau.

c) Một đường tròn có vô số trục đối xứng.

d) Một đoạn thẳng chỉ có một trục đối xứng.

Giải

a) Đúng.

b) Đúng, vì hai tam giác đối xứng nhau qua một trục thì bằng nhau nên chúng có chu vi bằng nhau.

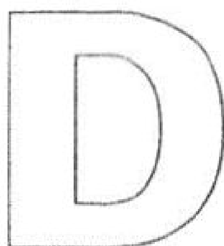
c) Đúng. Mọi đường thẳng đi qua tâm của đường tròn đều là trục đối xứng của đường tròn đó.

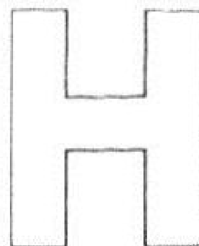
d) Sai, vì ngoài đường trung trực của đoạn thẳng trên còn đường thẳng chứa đoạn thẳng trên cũng là trục đối xứng.

42. ***Đố.***

a) Hãy tập cắt chữ D (hình a) bằng cách gấp đôi tờ giấy. Kể tên một vài chữ cái khác (kiểu chữ in hoa) có trục đối xứng.

b) Vì sao ta có thể gấp tờ giấy làm tư để cắt chữ H (hình b).


a)


b)

Học sinh tự làm.

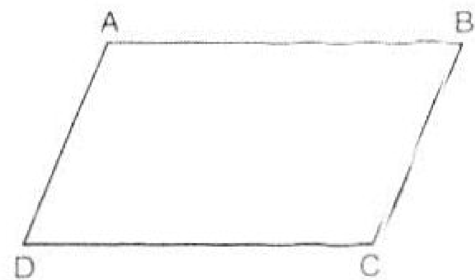
§7. HÌNH BÌNH HÀNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Định nghĩa:* Hình bình hành (h.b.h) là một tứ giác có các cạnh đối song song.

ABCD là hbh $\Leftrightarrow \begin{cases} AB // CD \\ AD // BC \end{cases}$

Hình bình hành là một hình thang có hai cạnh bên song song.



2. *Tính chất:*

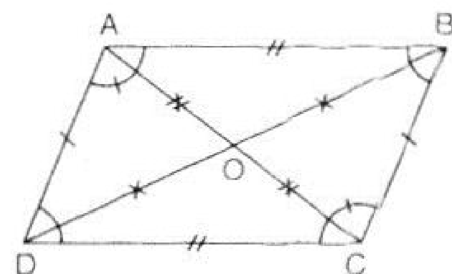
Định lý: Trong hình bình hành:

a) Các cạnh đối bằng nhau.

b) Các góc đối bằng nhau.

e) Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

GT	ABCD là hbh AC cắt BD tại O
KL	a) AB = CD; AD = BC b) $\hat{A} = \hat{C}; \hat{B} = \hat{D}$ c) OA = OC; OB = OD.



3. Các dấu hiệu nhận biết một tứ giác là hình bình hành:

1) Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.
2) Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
3) Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành.
4) Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.
5) Tứ giác có hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau là hình bình hành.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

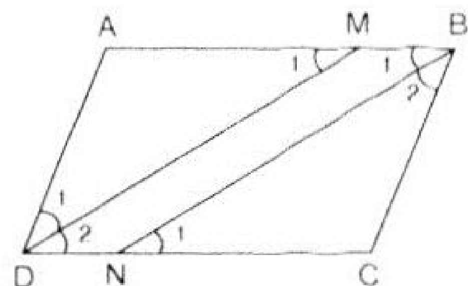
Cho hình bình hành ABCD, đường phân giác của góc $\hat{D}$ cắt AB tại M.

a) Chứng minh AM = AD.

b) Phân giác của góc $\hat{B}$ cắt CD tại N. Chứng minh rằng MBND là hình bình hành.

Giải

GT	$\hat{B} = \hat{D}; \hat{A} = \hat{C}$; AB // CD $\hat{D}_1 = \hat{D}_2; \hat{B}_1 = \hat{B}_2$
KL	a) AM = AD b) MBND là hbh



a) Chứng minh AM = AD:

Ta có: $\left.\begin{array}{l} AB \,//\, CD \\ \hat{M}_1 \text{ và } \hat{D}_2 \text{ so le trong} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \hat{M}_1 = \hat{D}_2 \\ \text{và } \hat{D}_1 = \hat{D}_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{D}_1$

Xét ΔADM có $\hat{M}_1 = \hat{D}_1$. Vậy ΔADM cân tại A.

Suy ra: AD = AM (đpcm)

b) Chứng minh MBND là hình bình hành:

Ta có: $\left.\begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{N}_1 \text{ (slt)} \\ \hat{B}_1 = \dfrac{1}{2}\hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{N}_1 = \dfrac{1}{2}\hat{B}$ (1)

và $\hat{D}_2 = \dfrac{1}{2}\hat{D}$ và $\hat{D} = \hat{B} \Rightarrow \hat{D}_2 = \dfrac{1}{2}\hat{B}$ (2)

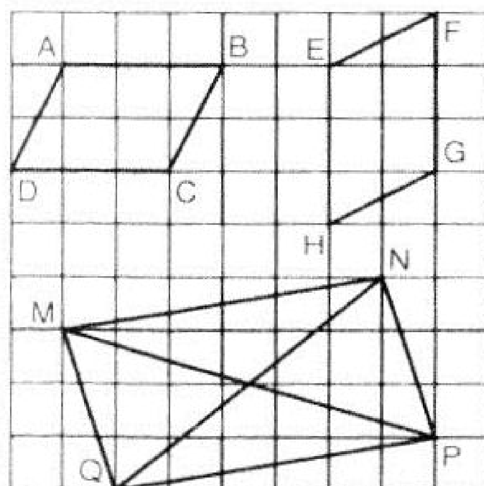
Từ (1) và (2) suy ra:

$\hat{N}_1 = \hat{D}_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} DM \,//\, NB \\ BM \,//\, DN \end{array}\right\} \Rightarrow$ MBND là hình bình hành.

Vậy MBND là hình bình hành (đpcm).

B. Bài tập căn bản

43. Các tứ giác ABCD, EFGH, MNPQ trên giấy kẻ ô vuông ở hình bên có là hình bình hành hay không?

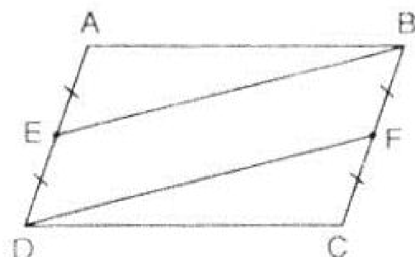


Hướng dẫn

Gợi ý: Nhìn hình vẽ trên giấy kẻ ô vuông, ta nhận thấy ba tứ giác ABCD, EFGD và MNPQ đều có ít nhất một cặp cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau. Vậy chúng đều là hình bình hành.

44. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC. Chứng minh rằng BE = DF.

Giải



Vì ABCD là hình bình hành nên ta có:

AD = BC ⇒ EA = ED = FB = FC

và AD // BC ⇒ ED // BF

Xét tứ giác EBFD, ta có: ED // BF

ED = BF

Vậy tứ giác EBFD là hình bình hành. Suy ra BE = DF (đpcm).

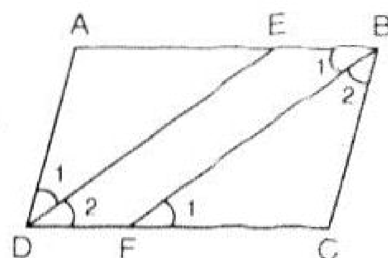
45. Cho hình bình hành ABCD (AB > BC). Tia phân giác của góc D cắt AB ở E, tia phân giác của góc B cắt CD ở F.

a) Chứng minh rằng DE // BF.

b) Tứ giác DEBF là hình gì? Vì sao?

Giải

a) Chứng minh DE // BF:



– Vì ABCD là hình bình hành nên:

$\left.\begin{array}{l} AB // CD \\ \hat{B}_1 \text{ so le trong với } \hat{F}_1 \end{array}\right\}$ suy ra: $\hat{F}_1 = \hat{B}_1 = \dfrac{\hat{B}}{2}$

– Vì DE là tia phân giác của $\hat{D}$ nên:

$\hat{D}_2 = \dfrac{\hat{D}}{2} = \dfrac{\hat{B}}{2} = \hat{F}_1$ (vì ABCD là hình bình hành nên $\hat{B} = \hat{D}$)

Mà $\hat{D}_2$ và $\hat{F}_1$ là hai góc đồng vị.

Suy ra DE // BF (đpcm)

b) Xét tứ giác DEBF, ta có: $\left.\begin{array}{l} DE // BF \\ EB // DF \end{array}\right\}$

Vậy tứ giác DEBF là hình bình hành

Luyện tập

46. Các câu sau đúng hay sai?

a) Hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau là hình bình hành.

b) Hình thang có hai cạnh bên song song là hình bình hành.

c) Tứ giác có hai cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.

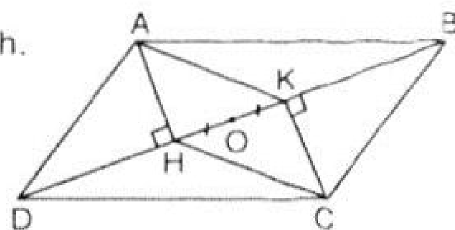
d) Hình thang có hai cạnh bên bằng nhau là hình bình hành.

Hướng dẫn

Gợi ý: Câu a, b : Đúng ; Câu c, d : Sai

Dựa vào các dấu hiệu nhận biết một tứ giác là hình bình hành em hãy tự chứng minh.

47. Cho hình bên, trong đó ABCD là hình bình hành.

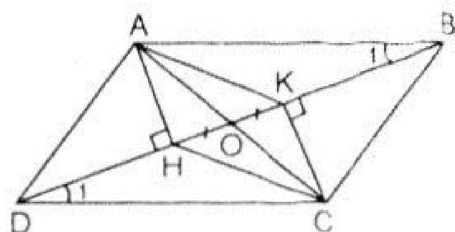


a) Chứng minh rằng AHCK là hình bình hành.

b) Gọi O là trung điểm của HK. Chứng minh rằng ba điểm A, O, C thẳng hàng.

Giải

a) Xét ΔAHB và ΔCKD



Ta có: $\widehat{AHB} = \widehat{CKD} = 90^0$

$\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (so le trong)

AB = DC (gt)

$\Rightarrow$ ΔAHB = ΔCKD (gn-cgv)

$\Rightarrow$ AH = CK (1)

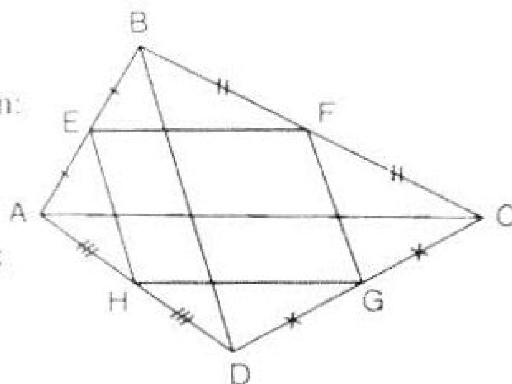
Ta có: $\left.\begin{array}{l} AH \perp BD \\ CK \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow AH // CK$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra AHCK là hình bình hành.

b) AHCK là hình bình hành nên hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên AC đi qua trung điểm HK, hay AC đi qua O. Vậy A, O, C thẳng hàng.

48 Tứ giác ABCD có E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì? Vì sao?

Giải



Trong ΔABC có EF là đường trung bình nên:

$EF // AC$ và $EF = \frac{1}{2}AC$ (1)

Trong ΔADC có GH là đường trung bình nên:

$GH // AC$ và $GH = \frac{1}{2}AC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: EF // GH và EF = GH

Vậy tứ giác EFGH là hình bình hành.

49. Cho hình bình hành ABCD. Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của CD, AB. Đường chéo BD cắt AI, CK theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng:

a) AI // CK.

b) DM = MN = NB.

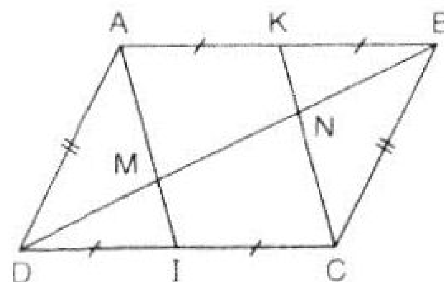
Giải

a) Chứng minh AI // CK

- Vì ABCD là hình bình hành (giả thiết) nên ta có:

AB // CD $\Rightarrow$ AK // CI

AB = CD $\Rightarrow$ AK = CI



- Xét tứ giác AKCI, ta có: $\left.\begin{array}{l} AK // CI \\ AK = CI \end{array}\right\}$

Vậy AKCI là hình bình hành

Suy ra AI // CK (đpcm).

b) Chứng minh DM = MN = NB

- Xét ΔDCN, ta có: ID = IC và IM // CN (do AI // CK)

Vậy M là trung điểm của cạnh DN hay DM = MN (1)

- Tương tự, xét ΔBAM, ta có: KA = KB

KN // AM (do AI // CK)

Vậy N là trung điểm của BM hay MN = NB (2)

Từ (1) và (2) ta có: DM = MN = NB (đpcm)

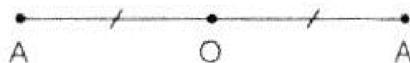
§8. ĐỐI XỨNG TÂM

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Hai điểm đối xứng qua một điểm*

Định nghĩa: Hai điểm gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm đó.

Điểm O gọi là tâm đối xứng của hai điểm A và A'. Điểm O đối xứng với chính nó.



2. *Hai hình đối xứng qua một điểm*

a) *Định nghĩa:* Hai hình gọi là đối xứng với nhau qua điểm O nếu mỗi điểm thuộc hình này đối xứng qua O với một điểm thuộc hình kia và ngược lại.

Điểm O gọi là tâm đối xứng của hai hình đó.

b) *Định lí:* Nếu hai đoạn thẳng (góc, tam giác) đối xứng với nhau qua một điểm thì chúng bằng nhau.

3. *Tâm đối xứng của một hình:*

Định nghĩa: Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình F nếu điểm đối xứng qua O của mỗi điểm thuộc hình F cũng thuộc hình F.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Các điểm A', B' và M' đối xứng với các điểm A, B và M qua điểm O. Tính A'M', biết rằng điểm M nằm giữa các điểm A và B, MB = 3,4cm, A'B' = 4,6cm.

Giải

Theo định lí về hai đoạn thẳng đối xứng với nhau qua điểm O ta có:

$$AM = A'M';\ MB = M'B'$$

Do $M \in AB$ nên: $AM + MB = AB$

Vậy $A'M' + M'B' = A'B' \Rightarrow M' \in A'B'$

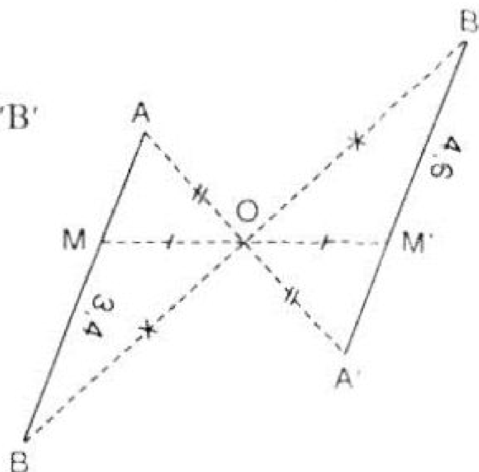
Ta có: $A'M' + M'B' = A'B' \Rightarrow A'M' = A'B' - M'B'$

Với $\begin{cases} A'B' = 4,6cm \\ M'B' = MB = 3,4cm \end{cases}$

$A'M' = 4,6 - 3,4$

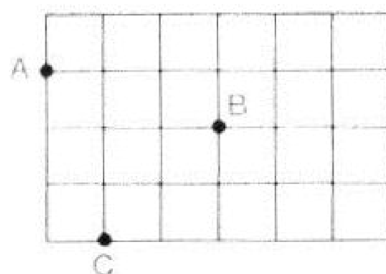
$A'M' = 1,2\ (cm)$

Vậy $A'M' = 1,2cm$.

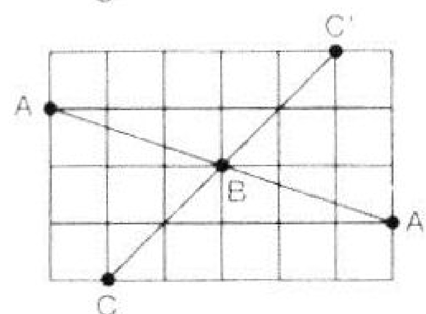


B. Bài tập căn bản

50. Vẽ điểm A' đối xứng với A qua B, vẽ điểm C' đối xứng với C qua B (hình vẽ).



Giải

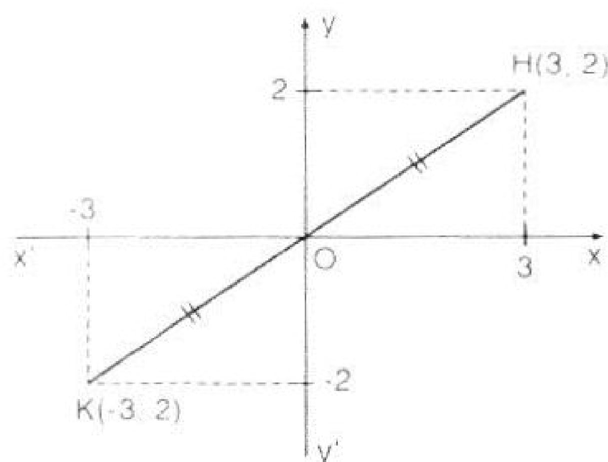


Kéo dài AB (phía B), chọn điểm A' sao cho B là trung điểm AA'.

Kéo dài CB (phía B), chọn điểm C' sao cho B là trung điểm CC'.

Ta được điểm A', C' như hình vẽ.

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xác định điểm H(3; 2). Ta xác định điểm K đối xứng của điểm H qua O. Khi đó điểm K có tọa độ là (−3; −2).

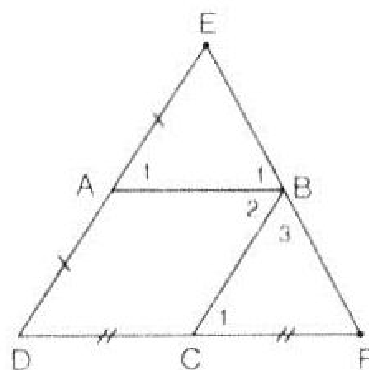


51. Trong mặt phẳng toạ độ, cho điểm H có toa độ (3; 2). Hãy vẽ điểm K đối xứng với H qua gốc toa độ và tìm toạ độ của K.

Đáp số: (−3; −2).

52. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là điểm đối xứng với D qua điểm A, gọi F là điểm đối xứng với D qua điểm C. Chứng minh rằng điểm E đối xứng với điểm F qua điểm B.

Giải



Xét hai tam giác ΔEAB và ΔBCF

$\left.\begin{array}{l} AB = DC \\ DC = CF \end{array}\right\} \Rightarrow AB = CF$ (a)

$\left.\begin{array}{l} AE = DA \\ DA = CB \end{array}\right\} \Rightarrow AE = CB$ (b)

$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{D} \text{ (đồng vị)} \\ \hat{D} = \hat{C}_1 \text{ (đồng vị)} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (c)

Từ (a), (b), (c) ⇒ ΔEAB = ΔBCF ⇒ BE = BF (1)

Ta có:

$$\begin{array}{rl} & \widehat{F} = \widehat{B}_1 \text{ (do } \Delta EAB = \Delta BCF) \\ + & \widehat{C}_1 = \widehat{B}_2 \text{ (do } \widehat{C}_1 = \widehat{D} = \widehat{B}_2) \\ & \widehat{B}_3 = \widehat{B}_3 \\ \hline & \underbrace{\widehat{F} + \widehat{C}_1 + \widehat{B}_3}_{180^0} = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3 \end{array}$$

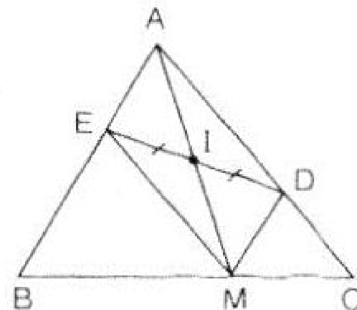
Vậy E, B, F thẳng hàng (2)

Từ (1) và (2) suy ra điểm E đối xứng với điểm F qua điểm B (đpcm).

53. Cho hình bên, trong đó MD // AB, ME // AC.

Chứng minh rằng điểm A đối xứng với điểm M qua điểm I.

Giải



Vì MD // AB và ME // AC } nên tứ giác AEMD là hình bình hành.

Vì I là trung điểm của đường chéo ED suy ra đường chéo AM cũng đi qua I và IA = IM.

Vậy A là điểm đối xứng của M qua I (đpcm).

Luyện tập

54. Cho góc vuông xOy, điểm A nằm trong góc đó. Gọi B là điểm đối xứng với A qua Ox, C là điểm đối xứng với A qua Oy. Chứng minh rằng điểm B đối xứng với điểm C qua O.

Giải

- Vì B là điểm đối xứng của A qua Ox, do đó Ox là đường trung trực của AB ⇒ Ox ⊥ AB và KA = KB
- Vì C là điểm đối xứng của A qua Oy, do đó Oy là đường trung trực của AC ⇒ Oy ⊥ AC và IA = IC.

  Tứ giác OIAK có hai cặp cạnh đối song song. Vậy OIKA là hình bình hành.

  Suy ra IA = OK = IC và KA = OI = KB.
- Xét hai tam giác vuông IOC và KBO, ta có:

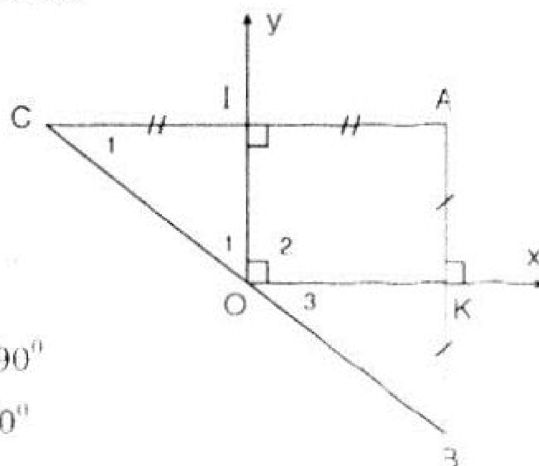
  IC = OK (cmt)

  OI = KB (cmt)

  Vậy ΔIOC = ΔKBO

  Suy ra: OC = OB (1)

  và $\widehat{C}_1 = \widehat{O}_3$



- Trong tam giác vuông IOC, ta có:

  $\widehat{O}_1 + \widehat{C}_1 = 90^0$ hay $\widehat{O}_1 + \widehat{O}_3 = 90^0$

  $\Rightarrow \widehat{O}_1 + \widehat{O}_2 + \widehat{O}_3 = 90^0 + 90^0 = 180^0$

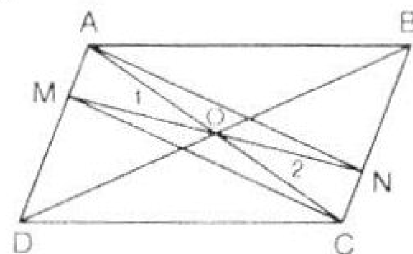
  Vậy ba điểm C, O, B thẳng hàng (2).

  Từ (1) và (2) chứng tỏ rằng điểm B đối xứng với điểm C qua O.

55. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Một đường thẳng đi qua O cắt các cạnh AB và CD theo thứ tự ở M và N. Chứng minh rằng điểm M đối xứng với điểm N qua O.

Giải

Ta chứng minh tứ giác AMCN là hình bình hành.



Vì ABCD là hình bình hành nên:

$\Delta CAB = \Delta ACD$ (c.c.c.)

$\Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{DAC}$ (1)

$OA = OC$ (2)

$\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (đối đỉnh)

Xét hai tam giác OCN và AM ta có: $\left.\begin{array}{l}\widehat{BCA} = \widehat{DAC}\\ OA = OC\\ \widehat{O_1} = \widehat{O_2}\end{array}\right\}$

Vậy $\Delta OCN = \Delta OAM \Rightarrow CN = AM$ (*)

Vì ABCD là hình bình hành nên AM // CN (**)

Từ (*), (**) suy ra tứ giác AMCN là hình bình hành và MN là đường chéo. Vậy điểm M đối xứng với điểm N qua O (đpcm).

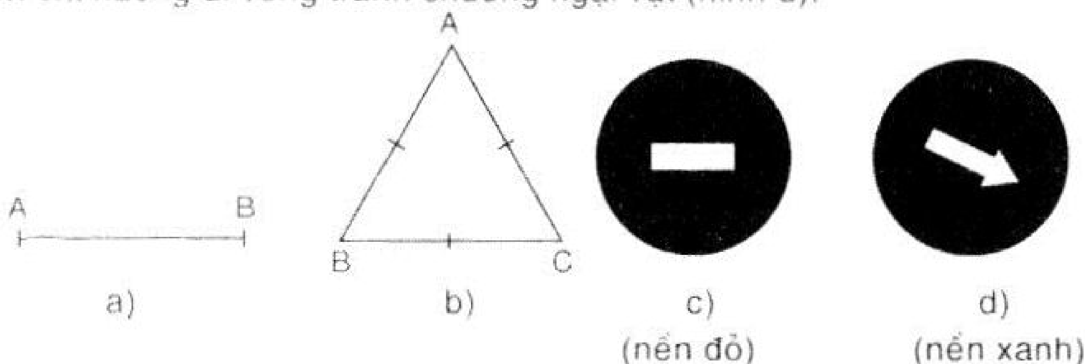
56. Trong các hình sau, hình nào có tâm đối xứng?

a) Đoạn thẳng AB (hình a)

b) Tam giác đều ABC (hình b)

c) Biển cấm đi ngược chiều (hình c)

d) Biển chỉ hướng đi vòng tránh chướng ngại vật (hình d).



a) b) c) (nền đỏ) d) (nền xanh)

Giải

a) Đoạn thẳng AB có tâm đối xứng. Tâm đối xứng chính là trung điểm I của AB.

b) Tam giác đều ABC không có tâm đối xứng.

c) Biển cấm đi ngược chiều (hình c) có tâm đối xứng. Tâm đối xứng đó chính là tâm của đường tròn.

d) Hình d không có tâm đối xứng.

57. Các câu sau đúng hay sai?

a) Tâm đối xứng của một đường thẳng là điểm bất kì của đường thẳng đó.

b) Trọng tâm của một tam giác là tâm đối xứng của tam giác đó.

c) Hai tam giác đối xứng với nhau qua một điểm thì có chu vi bằng nhau

Hướng dẫn

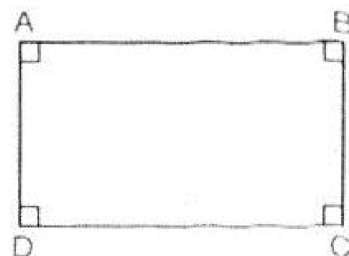
Câu a) và c) : Đúng ; Câu b) : Sai.

§9. HÌNH CHỮ NHẬT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Định nghĩa*

Hình chữ nhật là một tứ giác có 4 góc vuông.



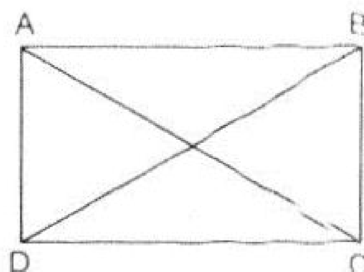
$$\text{ABCD là hcn} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ABCD là tứ giác} \\ \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^0 \end{cases}$$

- Nhận xét: Hình chữ nhật cũng là một hình bình hành, cũng là một hình thang cân.

2. *Tính chất*

a) Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành, của hình thang cân.

b) *Định lí:* Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau.



$$\text{ABCD là hcn} \Rightarrow AC = BD$$

3. Dấu hiệu nhận biết một tứ giác là hình chữ nhật:

1) Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.

2) Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.

3) Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.

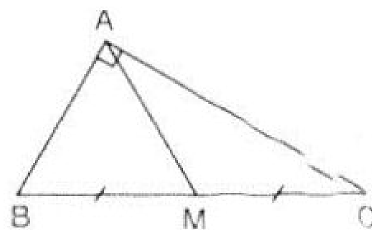
4) Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

4. Áp dụng vào tam giác

Định lí:

a) Trong một tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

b) Nếu một tam giác có trung tuyến ứng với một cạnh và bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.



$$\Delta ABC \text{ là tam giác vuông} \Leftrightarrow \begin{cases} MB = MC \\ AM = \dfrac{BC}{2} \end{cases}$$

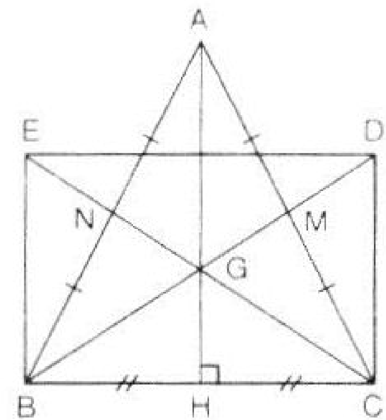
II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho ΔABC cân tại A, AH là đường cao, BM và CN là các trung tuyến. Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Trên tia đối của tia MG ta lấy điểm D sao cho MG = MD. Trên tia đối của tia NG ta lấy điểm E sao cho NG = NE. Chứng minh tứ giác BCDE là hình chữ nhật.

Giải

GT	AB = AC
	MA = MC = NA = NB
	NG = NE; MG = MD
KL	BCDE là hcn



Ta có GC = 2GN (tính chất của trọng tâm Δ)

và GE = 2GN (tính chất điểm đối xứng)

⇒ GE = GC (1)

Tương tự: GB = 2GM và GD = 2GM ⇒ GB = GD (2)

Từ (1) và (2) suy ra: BCDE là hình bình hành (tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường) (3)

ΔABC cân nên BG = GC hay BD = CE (4)

Từ (3) và (4) suy ra tứ giác BCDE là hình chữ nhật.

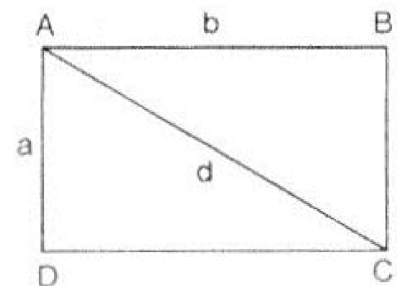
B. Bài tập căn bản

58. Điền vào chỗ trống, biết rằng a, b là độ dài các cạnh, d là độ dài đường chéo của một hình chữ nhật.

a	5	...	$\sqrt{13}$
b	12	$\sqrt{6}$	...
d	...	$\sqrt{10}$	7

Hướng dẫn

a	5	2	$\sqrt{13}$
b	12	$\sqrt{6}$	6
d	13	$\sqrt{10}$	7



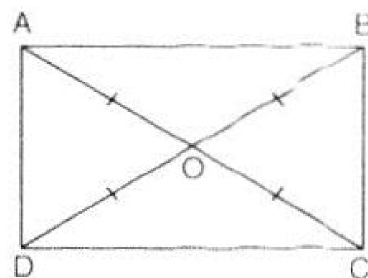
Áp dụng định lí Py-ta-go trong các tam giác vuông có liên quan để tính các cạnh còn lại của tam giác đó.

59. Chứng minh rằng:

a) Giao điểm hai đường chéo của hình chữ nhật là tâm đối xứng của hình chữ nhật đó.

b) Hai đường thẳng đi qua trung điểm hai cặp cạnh đối của hình chữ nhật là hai trục đối xứng của hình chữ nhật đó.

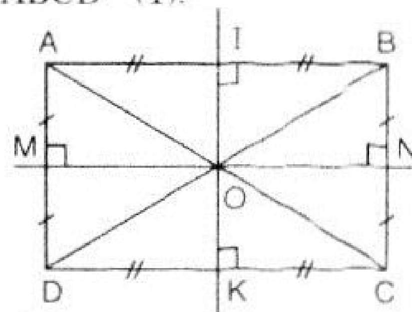
Giải



a) Ta biết rằng hình bình hành có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo. Do hình chữ nhật là một hình bình hành đặc biệt. Vậy giao điểm O của hai đường chéo AC và BD là tâm đối xứng của hình chữ nhật.

b) Theo tính chất của hình chữ nhật ta suy ra được ΔOAB và ΔOCD là hai tam giác cân.

Gọi IK là đường thẳng qua O và vuông góc với AB nên cũng vuông góc với CD. Do OA = OB và OC = OD nên IK đi qua trung điểm của AB và CD. Suy ra IK là trục đối xứng của hình chữ nhật ABCD (1).

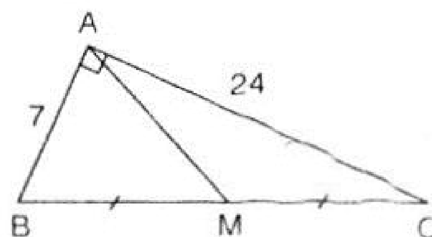


– Tương tự đường thẳng MN cũng là trục đối xứng của hình chữ nhật ABCD (2).

Từ (1) và (2) ta kết luận: Trong hình chữ nhật, hai đường thẳng đi qua trung điểm của hai cặp cạnh đối là hai trục đối xứng của hình chữ nhật đó.

60. Tính độ dài trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 7cm và 24cm.

Giải



Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 7^2 + 24^2 = 625$$

$$\Rightarrow \quad BC = \sqrt{625} = 25 \text{ (cm)}$$

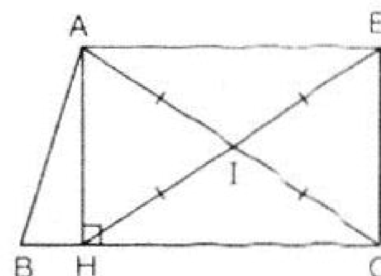
Vì ΔABC vuông tại A, trung tuyến AM sẽ bằng:

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ (cm)}$$

Vậy AM = 12,5cm.

61. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC, E là điểm đối xứng với H qua I. Tứ giác AHCE là hình gì? Vì sao?

Giải



– Xét tứ giác AHCE ta có: IA = IC; IH = IE

Vậy tứ giác AHCE là hình bình hành.

– Hơn nữa, hình bình hành AHCE có $\widehat{H} = 90^\circ$.

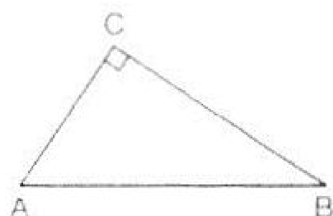
Vậy tứ giác AHCE là hình chữ nhật.

Luyện tập

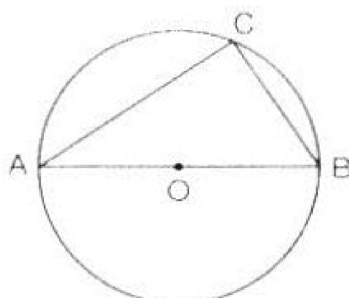
62. Các câu sau đúng hay sai?

a) Nếu tam giác ABC vuông tại C thì điểm C thuộc đường tròn có đường kính là AB (hình a).

b) Nếu điểm C thuộc đường tròn có đường kính là AB (C khác A và B) thì tam giác ABC vuông tại C (hình b).

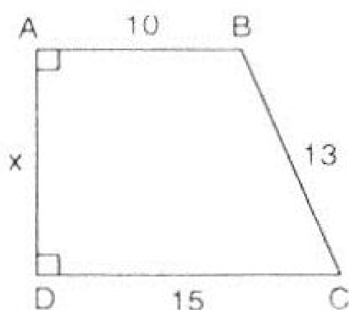


a)



b)

Hướng dẫn



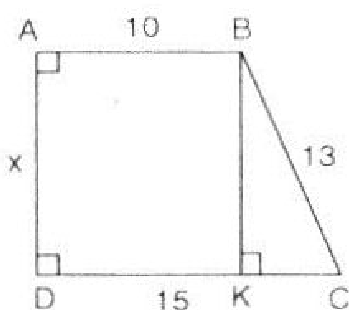
Câu a), b) đều đúng

Học sinh tự chứng minh.

63. Tìm giá trị x trên hình bên.

Giải

Từ B vẽ $BK \perp DC$ ($K \in DC$).



– Tứ giác ABKD có 3 góc vuông ($\hat{A} = \hat{D} = \hat{K} = 90^0$) nên ABKD là hình chữ nhật.

$\Rightarrow$ $AB = DK = 10$

và $BK = AD = x$

Ta có K nằm giữa D và C nên:

$DK + KC = DC$

$\Rightarrow$ $KC = DC - DK = 15 - 10 = 5$

– Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông KCB, ta có:

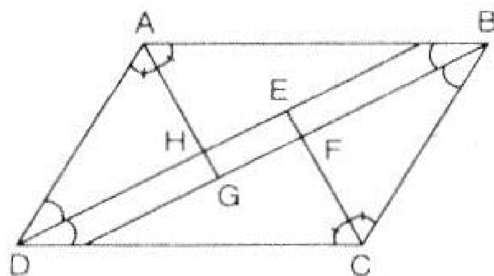
$BC^2 = KB^2 + KC^2 \Rightarrow KB^2 = BC^2 - KC^2$

hay $KB^2 = 13^2 - 5^2 = 169 - 25 = 144 = 12^2$

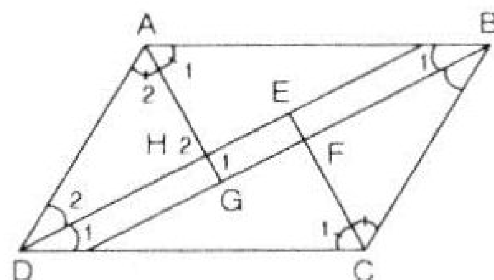
Suy ra $KB = 12$

Mà $x = AD = KB = 12$. Vậy $x = 12$.

64. Cho hình bình hành ABCD. Các tia phân giác của các góc A, B, C, D cắt nhau như trên hình bên. Chứng minh rằng EFGH là hình chữ nhật.



Giải



Vì ABCD là hình bình hành nên:

$\hat{A} = \hat{C}$; $\hat{B} = \hat{D}$

Và $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D} = 180^0$

$\hat{A} + \hat{D} = \hat{B} + \hat{C} = 180^0$

Xét ΔDEC, ta có: $\hat{D}_1 + \hat{C}_1 = \dfrac{\hat{D} + \hat{C}}{2} = \dfrac{180^0}{2} = 90^0$

Ta có: $\widehat{D}_1 + \widehat{C}_1 + \widehat{E} = 180^0 \Rightarrow \widehat{E} = 180^0 - (\widehat{D}_1 + \widehat{C}_1) = 180^0 - 90^0 = 90^0$ (1)

– Tương tự, xét ΔAHD, ta có: $\widehat{A}_2 + \widehat{D}_2 = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{D}}{2} = \dfrac{180^0}{2} = 90^0$

Và $\widehat{A}_2 + \widehat{D}_2 + \widehat{H}_2 = 180^0 \Rightarrow \widehat{H}_2 = 180^0 - (\widehat{A}_2 + \widehat{D}_2) = 180^0 - 90^0 = 90^0$

Mà $\widehat{H}_1 = \widehat{H}_2$ (đđ) $\Rightarrow \widehat{H}_1 = 90^0$ (2)

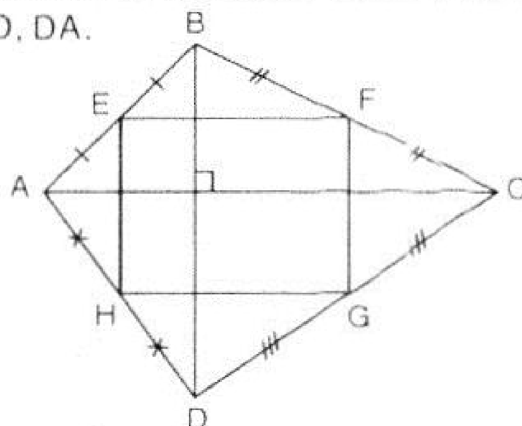
– Tương tự, xét ΔAGB, ta có: $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 = \dfrac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2} = 90^0$

và $\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{G} = 180^0 \Rightarrow \widehat{G} = 180^0 - (\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1) = 180^0 - 90^0 = 90^0$ (3)

– Xét tứ giác EFGH, ta có: $\widehat{E} = \widehat{H} = \widehat{G} = 90^0$

Vậy tứ giác EFGH là hình chữ nhật.

65. Tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì? Vì sao?



Giải

– Xét ΔABC, ta có: EA = EB

FB = FC

Vậy EF là đường trung bình của ΔABC.

Suy ra EF // AC và $EF = \dfrac{AC}{2}$ (1)

– Tương tự ta có: HG là đường trung bình của ΔADC.

Suy ra HG // AC và $HG = \dfrac{AC}{2}$ (2)

– Từ (1) và (2) suy ra EF // HG và EF = HG

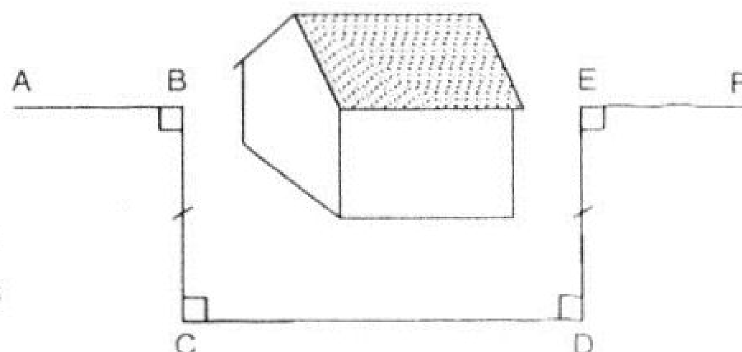
Suy ra tứ giác EFGH là hình bình hành (*)

– Tương tự, ta có: EH là đường trung bình của ΔABD. Suy ra EH // BD (3)

Ta có: $\left.\begin{array}{l} EF // AC \\ EH // BD \\ AC \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow EF \perp EH$ hay $\widehat{E} = 90^0$ (**)

Từ (*) và (**), ta suy ra tứ giác AFGH là hình chữ nhật.

66. Đố. Một đội công nhân đang trồng cây trên đoạn đường AB thì gặp chướng ngại vật che lấp tầm nhìn (hình bên). Đội đã dựng các điểm C, D, E như trên hình vẽ rồi trồng cây tiếp trên đoạn đường EF vuông góc với DE. Vì sao AB và EF cùng nằm trên một đường thẳng?



Giải

Chứng minh AB và EF cùng nằm trên một đường thẳng:

Theo giả thiết ta có: $\left.\begin{array}{l} BC \perp CD \\ ED \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow BC // ED$

Xét tứ giác BCDE, ta có: $BC // ED$ và $BC = ED$

Suy ra BCDE là hình bình hành và có góc $= 90°$

Vậy tứ giác BCDE là hình chữ nhật.

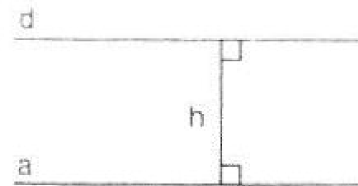
Suy ra A, B, E và B, E, F thẳng hàng hay AB và EF cùng nằm trên một đường thẳng.

§10. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MỘT ĐƯỜNG THẲNG CHO TRƯỚC

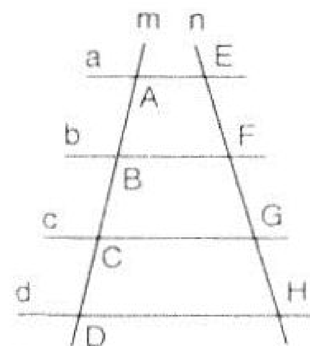
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song*

a) Định nghĩa: Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm tùy ý trên đường thẳng này đến đường thẳng kia.

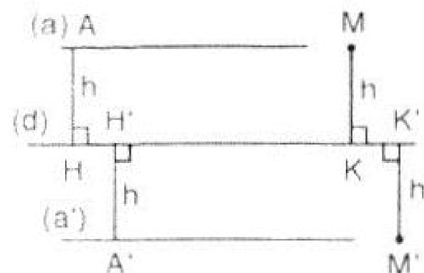


b) Định lí: (về đường thẳng song song cách đều) Các đường thẳng song song cách đều chắn trên một đường thẳng bất kỳ các đoạn thẳng liên tiếp bằng nhau.



2. *Tính chất đường thẳng song song với một đường thẳng cho trước*

a) Tính chất 1: Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng d và có khoảng cách đến đường thẳng d bằng h thì mọi điểm thuộc đường thẳng a đều cách d một khoảng bằng h.



b) Tính chất 2: Các điểm có khoảng cách không đổi h đến đường thẳng d cố định thì nằm trên hai đường thẳng song song với d và cách d một khoảng bằng h.

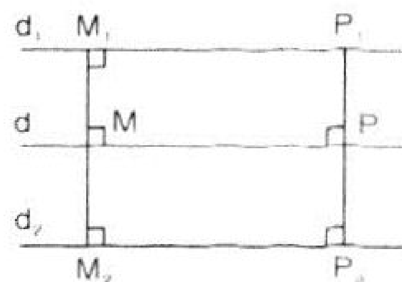
II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Tìm tập hợp (quỹ tích) các điểm cách đều hai đường thẳng song song cho trước.

Giải

a) *Thuận:* Giả sử đường thẳng $d_1 // d_2$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng là ℓ.



Giả sử M là điểm cách đều hai đường thẳng d_1 và d_2; MM_1 và MM_2 là khoảng cách từ điểm M đến d_1, d_2.

Ta có $M_1M_2 = \ell$ và $MM_1 = \frac{\ell}{2}$ (không đổi).

Vậy điểm M nằm trên đường thẳng d cách đường thẳng d_1 một khoảng $\frac{\ell}{2}$ (có thể nói M nằm trên đường thẳng d song song cách đều hai đường thẳng d_1, d_2).

b) *Đảo:* Ngược lại, lấy điểm P bất kỳ thuộc đường thẳng d và vẽ $PP_1 \perp d_1$, $PP_2 \perp d_2$.

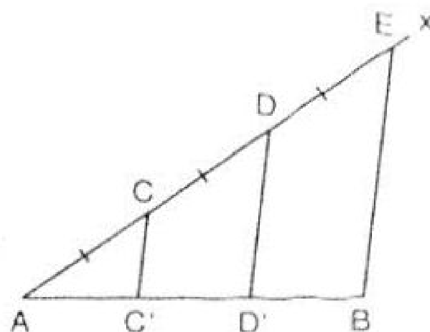
Tứ giác MM_1P_1P và MPP_2M_2 là hình chữ nhật nên: $PP_1 = \frac{\ell}{2}$; $PP_2 = \frac{\ell}{2}$

Do đó P cách đều hai đường thẳng song song d_1, d_2.

Vậy tập hợp tất cả các điểm cách đều hai đường thẳng song song d_1, d_2 là đường thẳng d song song và cách đều hai đường thẳng d_1, d_2.

B. Bài tập căn bản

67. Cho đoạn thẳng AB. Kẻ tia Ax bất kỳ. Trên tia Ax lấy các điểm C, D, E sao cho AC = CD = DE (hình bên). Kẻ đoạn thẳng EB. Qua C, D kẻ các đường thẳng song song với EB. Chứng minh rằng đoạn thẳng AB bị chia ra ba phần bằng nhau.



Giải

Xét $\Delta ADD'$, ta có: CA = CD, CC' đi qua trung điểm của cạnh AD' của $\Delta ADD'$

Suy ra: C'A = C'D' (1)

Vì CC' // EB. Vậy tứ giác CC'BE là hình thang.

Ta còn có: DC = DE và DD' // EB

Vậy DD' đi qua trung điểm của cạnh C'B của hình thang CC'BE.

Suy ra C'D' = D'B (2)

Từ (1) và (2), ta có: C'A = C'D' = D'B (đpcm)

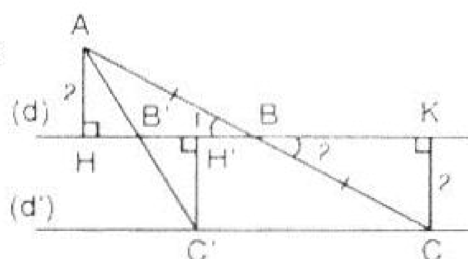
68. Cho điểm A nằm ngoài đường thẳng d và có khoảng cách đến d bằng 2cm. Lấy điểm B bất kì thuộc đường thẳng d. Gọi C là điểm đối xứng với điểm A qua điểm B. Khi điểm B di chuyển trên đường thẳng d thì điểm C di chuyển trên đường nào?

Giải

Vẽ AH ⊥ d, khi đó AH gọi là khoảng cách từ A đến d và AH = 2cm.

Từ C vẽ CK ⊥ d.

Xét hai tam giác vuông HAB và KCB, ta có:



BA = BC (gt)

$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (đđ)

Vậy $\Delta HAB = \Delta KCB$ (ch.gn)

Suy ra AH = CK = 2 (cm) = không đổi.

Vì điểm C cách đường thẳng d cố định một đoạn không đổi bằng 2cm. Vậy khi B di chuyển trên đường thẳng d thì điểm C di chuyển trên đường thẳng d' song song với d và cách d một khoảng không đổi bằng 2cm.

69. Ghép mỗi ý (1), (2), (3), (4) với một trong các ý (5), (6), (7), (8) để được một khẳng định đúng:

(1) Tập hợp các điểm cách điểm A cố định một khoảng 3cm.

(2) Tập hợp các điểm cách đều hai đầu của đoạn thẳng AB cố định.

(3) Tập hợp các điểm nằm trong góc xOy và cách đều hai cạnh của góc đó.

(4) Tập hợp các điểm cách đều đường thẳng a cố định một khoảng 3cm.

(5) là đường trung trực của đoạn thẳng AB.

(6) là hai đường thẳng song song với a và cách a một khoảng 3cm.

(7) là đường tròn tâm A bán kính 3cm.

(8) là tia phân giác của góc xOy.

Gợi ý: (1) – (7); (2) – (5); (3) – (8); (4) – (6)

Xem kết quả như những bài tập. Em hãy tự chứng minh.

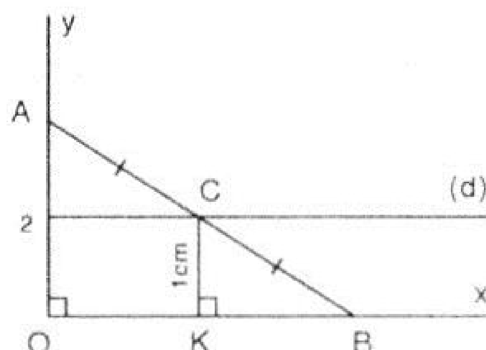
Luyện tập

70. Cho góc vuông xOy, điểm A thuộc tia Oy sao cho OA = 2cm. Lấy B là một điểm bất kì thuộc tia Ox. Gọi C là trung điểm của AB. Khi điểm B di chuyển trên tia Ox thì điểm C di chuyển trên đường nào?

Giải

Trong tam giác vuông OAB từ trung điểm C của cạnh AB ta kẻ CK ⊥ Ox. Khi đó CK // OA.

Vậy CK là đường trung bình của tam giác OAB. Suy ra $CK = \dfrac{OA}{2} = 1$ (cm)



Vậy điểm C cách đường thẳng cố định Ox một khoảng không đổi bằng 1cm. Vậy khi điểm B di chuyển trên tia Ox thì điểm C di chuyển trên đường thẳng d song song với tia Ox và cách Ox một khoảng không đổi bằng 1cm.

71. Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy M là một điểm bất kì thuộc cạnh BC. Gọi MD là đường vuông góc kẻ từ M đến AB, ME là đường vuông góc kẻ từ M đến AC, O là trung điểm của DE.

a) Chứng minh rằng ba điểm A, O, M thẳng hàng.

b) Khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì điểm O di chuyển trên đường nào?

c) Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì AM có độ dài nhỏ nhất?

Giải

a) Theo giả thiết bài toán, ta có:

$$\hat{A} = \hat{D} = \hat{E} = 90^0$$

Vậy tứ giác ADME là hình chữ nhật có đường chéo DE.

Vì O là trung điểm của đường chéo DE và AM là đường chéo thứ hai của hình chữ nhật ADME nên AM phải đi qua O.

Vậy ba điểm A, O, M thẳng hàng.

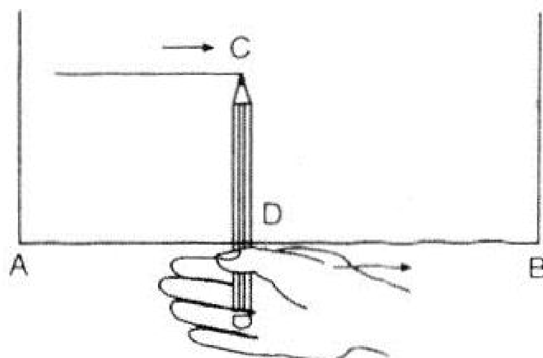
b) Vẽ AH và OK cùng vuông góc với BC và đặt AH = h (không đổi). Trong tam giác AHM thì OK là đường trung bình nên:

$$OK = \frac{AH}{2} = \frac{h}{2} \text{ (không đổi)}$$

Vậy khi M di chuyển trên cạnh BC thì điểm O di chuyển trên đoạn thẳng d đoạn nằm trong ΔABC và cách cạnh huyền BC một khoảng $\frac{h}{2}$.

c) Khi điểm M trùng với điểm H, nghĩa là AM = AH thì khi đó AM có độ dài nhỏ nhất (vì đường cao bao giờ cũng ngắn hơn các đường xiên cùng phát xuất từ một điểm đến đường thẳng).

72. Đố. Để vạch một đường thẳng song song với mép gỗ AB và cách mép gỗ 10cm, bác thợ mộc đặt đoạn bút chì CD dài 10cm vuông góc với ngón tay trỏ lấy làm cữ (hình bên), rồi đưa ngón trỏ chạy dọc theo mép gỗ AB. Căn cứ vào kiến thức nào mà ta kết luận được rằng đầu chì C vạch nên đường thẳng song song với AB và cách AB là 10cm?



Gợi ý

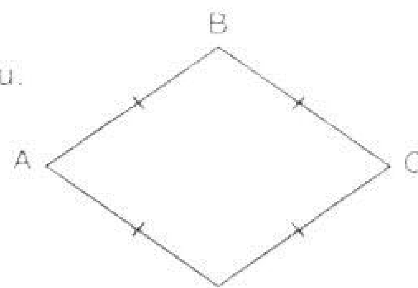
Điểm C cách mép gỗ AB cố định một khoảng không đổi bằng 10cm. Vậy khi tay di chuyển thì đầu bút chì C vạch nên đường thẳng song song với AB và cách AB một khoảng 10cm.

§11. HÌNH THOI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Định nghĩa*

Hình thoi là một tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.



ABCD là hình thoi

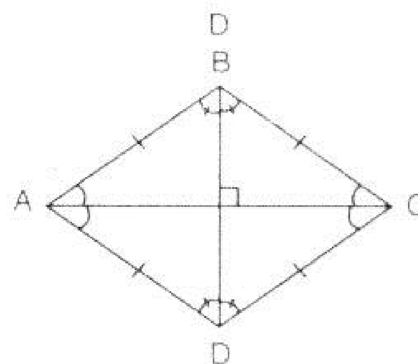
⇔ ABCD là tứ giác; AB = BC = CD = DA

2. *Tính chất*

a) Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành.

b) Định lí: Trong hình thoi:

- Hai đường chéo vuông góc với nhau.
- Hai đường chéo là đường phân giác các góc của hình thoi.



GT	ABCD là hình thoi
KL	a) $AC \perp BD$ b) • AC là phân giác của $\widehat{A}$; CA là phân giác của $\widehat{C}$ • BD là phân giác của $\widehat{B}$; DB là phân giác của $\widehat{D}$

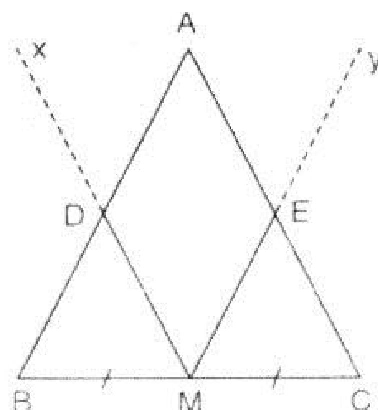
3. *Dấu hiệu nhận biết một tứ giác là hình thoi*

1) Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
2) Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
3) Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc là hình thoi.
4) Hình bình hành có một đường chéo vừa là đường phân giác của một góc là hình thoi.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho tam giác cân ABC (AB = AC), M là trung điểm của cạnh BC. Qua M vẽ đoạn thẳng song song với cạnh AB, AC và cắt các cạnh này theo thứ tự tại E, D. Chứng minh rằng tam giác ADME là hình thoi.



Giải

GT	$AB = AC; \widehat{B} = \widehat{C}; MB = MC$ $Mx \parallel AC; My \parallel AB$
KL	ADME là hình thoi

Trong tam giác cân ABC ta có: $\left.\begin{matrix} MB = MC \\ MD \parallel AC \end{matrix}\right\}$

Vậy MD là đường trung bình của ΔABC.

Suy ra: $DM = \dfrac{AC}{2}$ và DA = BD (1)

Tương tự, $\left.\begin{matrix} MB = MC \\ ME \parallel AB \end{matrix}\right\}$. Vậy ME là đường trung bình của ΔABC.

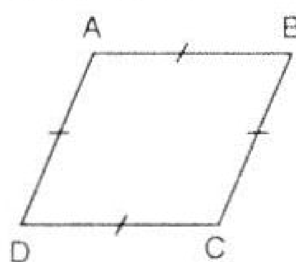
Suy ra: $ME = \dfrac{AC}{2}$ và EA = EC (2)

Từ (1) và (2) suy ra DM = ME = EA = AD

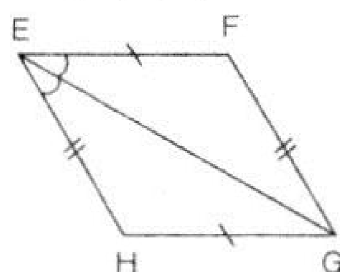
Vậy tứ giác ADME là hình thoi (đpcm).

B. Bài tập căn bản

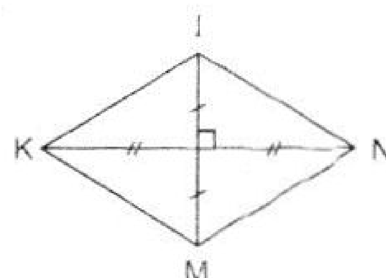
73. Tìm các hình thoi trên hình a, b, c, d, e.



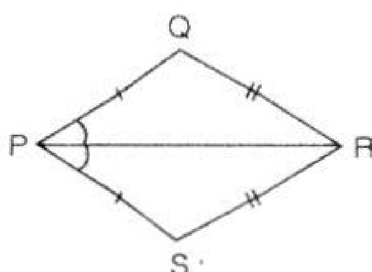
a)



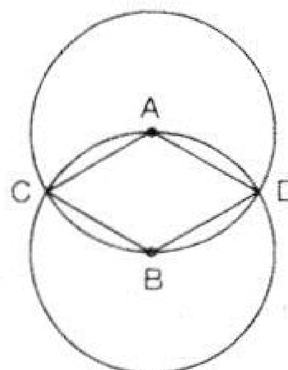
b)



c)



d)



e)

Giải

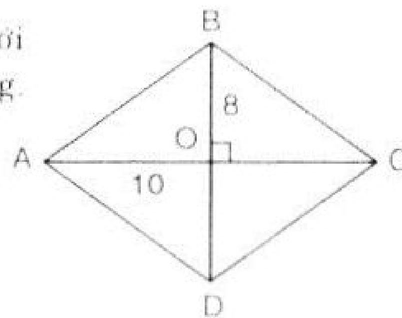
Các tứ giác sau đây là hình thoi:

- Hình a) (dấu hiệu 1)
- Hình b) (dấu hiệu 4)
- Hình c) (dấu hiệu 3)
- Hình e) (dấu hiệu 1)
- Hình d) không là hình thoi (vì 4 cạnh không bằng nhau).

74. Hai đường chéo của một hình thoi bằng 8cm và 10cm. Cạnh của hình thoi bằng giá trị nào trong các giá trị sau:

(A) 6cm; (B) $\sqrt{41}$ cm; (C) $\sqrt{164}$ cm; (D) 9cm?

Giải



Ta có hai đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
Do đó: $AC \perp BD$

$OB = OD = 4cm$

$OA = OC = 5cm$

$AB = BC = CD = DA$

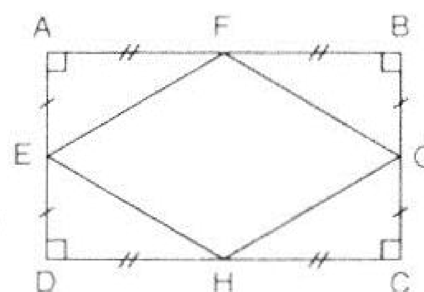
Áp dụng định lí Py-ta-go:

$BC^2 = OB^2 + OC^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41 \Rightarrow BC = \sqrt{41}$ (cm)

Vậy $BC = \sqrt{41}$ cm. Các em chọn câu (B).

75. Chứng minh rằng trung điểm bốn cạnh của một hình chữ nhật là các đỉnh của một hình thoi.

Giải



Vì ABCD là hình chữ nhật nên: $AB = CD$

$\Rightarrow AF = FB = CH = HD$ và $AD = BC$

$\Rightarrow AE = ED = CG = GB$

- Ta có $\Delta AEF = \Delta BGF = \Delta CGH = \Delta DEH$ (c.g.c)

Suy ra $EF = FG = GH = HE$

Xét tứ giác EFGH ta có: $EF = FG = GH = HE$

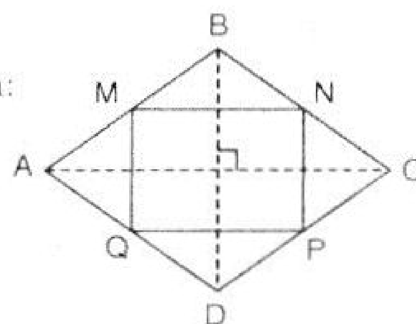
Vậy tứ giác EFGH là hình thoi (đpcm).

76. Chứng minh rằng trung điểm các cạnh của một hình thoi là các đỉnh của một hình chữ nhật.

Giải

Theo giả thiết cho, ta có MN là đường trung bình của ΔBAC nên:

$$MN \parallel AC \text{ và } MN = \frac{AC}{2} \quad (1)$$



Tương tự, PQ là đường trung bình của ΔDAC nên:

$$PQ \parallel AC \text{ và } PQ = \frac{AC}{2} \quad (2)$$

Xét tứ giác MNPQ ta có:

$MN \parallel PQ$ và $MN = PQ$ (do (1) và (2))

Vậy tứ giác MNPQ là hình bình hành. (*)

Hơn nữa: $MN \parallel AC$, $MQ \parallel BD$ mà $AC \perp BD$ nên $MN \perp MQ$ (**)

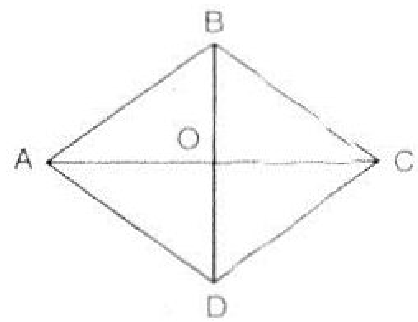
Từ (*) và (**), suy ra hình bình hành MNPQ có một góc vuông nên nó là hình chữ nhật (đpcm).

77. Chứng minh rằng:

a) Giao điểm hai đường chéo của hình thoi là tâm đối xứng của hình thoi.

b) Hai đường chéo của hình thoi là hai trục đối xứng của hình thoi.

Giải

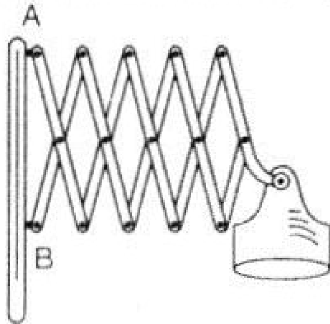


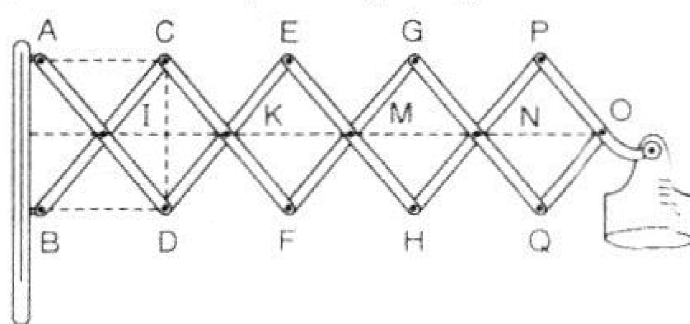
a) Ta biết rằng: hình thoi là một hình bình hành đặc biệt, mà hình bình hành có tâm đối xứng là giao điểm hai đường chéo. Do đó giao điểm của hai đường chéo là tâm đối xứng của hình thoi.

b) Ta có:

- A đối xứng với chính nó qua AC, B đối xứng với D qua AC.
  ⇒ AB và AD đối xứng với nhau qua AC.
- Tương tự, các cạnh CB và CD đối xứng với nhau qua AC.
  Do đó AC là trục đối xứng của hình thoi.
- Chứng minh tương tự, BD là trục đối xứng của hình thoi.

78. Đố. Hình vẽ biểu diễn một phần của cửa xếp, gồm những thanh kim loại dài bằng nhau và được liên kết với nhau bởi các chốt tại hai đầu và tại trung điểm. Vì sao tại mỗi vị trí của cửa xếp, các tứ giác trên hình vẽ đều là hình thoi, các điểm chốt I, K, M, N, O nằm trên một đường thẳng?





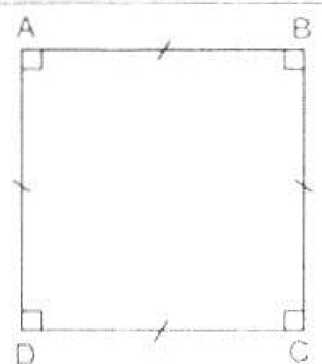
Giải

Kí hiệu như trên hình vẽ.

- Tứ giác ABDC có các đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên ABDC là hình chữ nhật.
  Do đó DC // AB.
  Tứ giác IDKC có 4 cạnh bằng nhau nên nó là hình thoi.
  ⇒ $IK \perp DC \Rightarrow IK \perp AB$ (vì DC // AB) (1)
- Chứng minh tương tự $KM \perp AB$ (2)
  Từ (1) và (2) suy ra: I, K, M thuộc cùng một đường thẳng vuông góc với AB. Chứng minh tương tự và suy ra các chốt I, K, M N, O luôn nằm trên một đường thẳng vuông góc với AB (đpcm).

§12. HÌNH VUÔNG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN



1. *Định nghĩa:* Hình vuông là một tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.

ABCD là hình vuông ⇔
- ABCD là tứ giác
- $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90^0$
- AB = BC = CD = DA

Từ định nghĩa hình vuông, ta suy ra:
- Hình vuông là hình chữ nhật có bốn cạnh bằng nhau.
- Hình vuông là hình thoi có bốn góc vuông.
- Hình vuông vừa là hình chữ nhật vừa là hình thoi.

2. *Tính chất:* Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

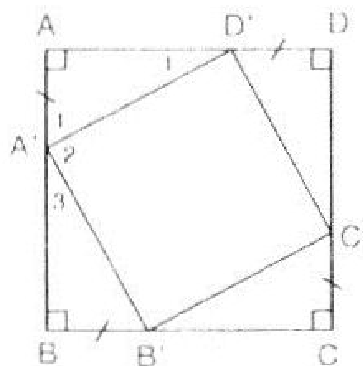
3. *Dấu hiệu nhận biết một tứ giác là hình vuông*

Một tứ giác có một trong các điều kiện sau đây là hình vuông:
- Một hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau.
- Một hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc.
- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc.
- Hình thoi có một góc vuông.
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA đặt các đoạn thẳng bằng nhau AA' = BB' = CC' = DD'. Chứng minh rằng tứ giác A'B'C'D' là hình vuông.



Giải

GT	AB = BC = CD = DA
	AA' = BB' = CC' = DD'
KL	A'B'D'C' là hình vuông

Ta có: ABCD là hình vuông nên

AB = BC = CD = DA

Vì AA' = BB' = CC' = DD' (gt) nên:

AB − AA' = BC − BB' = CD − CC' = DA − DD'

hay BA' = CB' = DC' = AD'

Do đó: ΔBB'A' = ΔCC'B' = ΔDD'C' = ΔAA'D' (c.g.c)

⇒ A'B' = B'C' = C'D' = D'A'

Vậy tứ giác A'B'C'D' là hình thoi (1)

Trong tam giác vuông AA'D' có:

$$\widehat{A'_1} + \widehat{D'_1} = 90^0 \text{ hay } \widehat{A'_1} + \widehat{A'_3} = 90^0 \text{ (vì } \Delta AA'D' = \Delta BB'A')$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{D'A'B'} = 90^0 \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác A'B'C'D' là hình vuông.

B. Bài tập căn bản

79. a) Một hình vuông có cạnh bằng 3cm. Đường chéo của hình vuông đó bằng: 6cm, $\sqrt{18}$ cm, 5cm hay 4cm?

b) Đường chéo của một hình vuông bằng 2dm. Cạnh của hình vuông đó bằng: 1dm, $\frac{3}{2}$ dm, $\sqrt{2}$ dm hay $\frac{4}{3}$ dm?

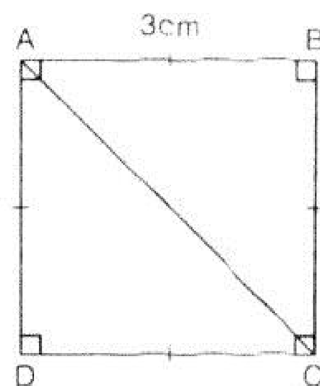
Giải

a) Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông ABC, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 3^2 + 3^2 = 18$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{18} \text{ cm}$$

Vậy AC = $\sqrt{18}$ cm



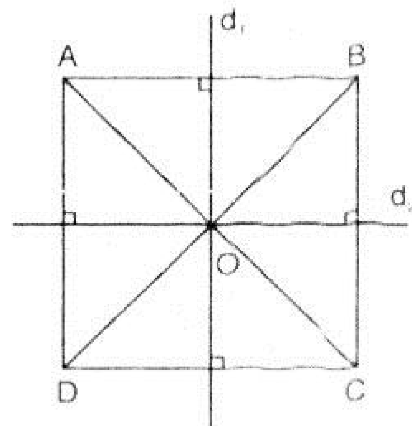
b) Tương tự:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 2AD^2 \text{ (do AD = DC)}$$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{AC^2}{2} = \frac{2^2}{2} = 2 \Rightarrow AD = \sqrt{2} \text{ (dm)}$$

Vậy AD = $\sqrt{2}$ (dm).

80. Hãy chỉ rõ tâm đối xứng của hình vuông, các trục đối xứng của hình vuông.



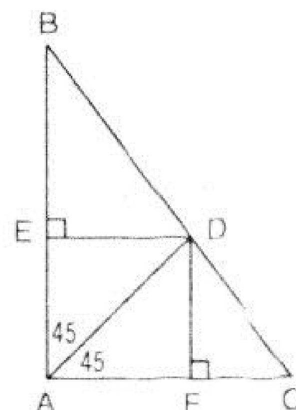
Giải

– Giao điểm hai đường chéo của hình vuông là tâm đối xứng của nó.

– Hình vuông có bốn trục đối xứng: d_1, d_2, AC, BD. (Em hãy tự chứng minh)

81. Cho hình bên

Tứ giác AEDF là hình gì? Vì sao?



Giải

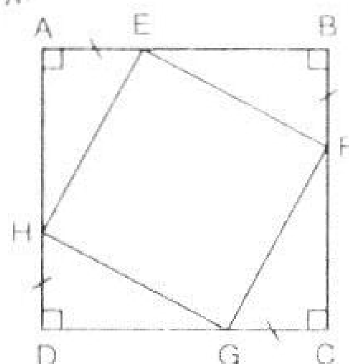
Xét tứ giác AEDF, ta có: $\hat{A} = \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ$

Vậy tứ giác AEDF là hình chữ nhật (1)

Ta còn có: $\widehat{EAD} = \widehat{DAF} = 45^\circ$. Suy ra AD là đường phân giác của góc A.

Từ (1) và (2) ta suy ra: tứ giác AEDF là hình vuông.

82. Cho hình bên, trong đó ABCD là hình vuông. Chứng minh rằng tứ giác EFGH là hình vuông.



Hướng dẫn

Từ 4 tam giác vuông bằng nhau, ta chứng minh EF = FG = GH = HE để suy ra tứ giác EFGH là hình thoi (1)

Sau đó chứng minh: $\widehat{AEH} + \widehat{BEF} = 90^\circ$. Từ đó suy ra: $\widehat{HEF} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra EFGH là hình vuông.

Luyện tập

83. Các câu sau đây đúng hay sai?

a) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.

b) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình thoi.

c) Hình thoi là tứ giác có tất cả các cạnh bằng nhau.

d) Hình chữ nhật có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

e) Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.

Hướng dẫn

Căn cứ vào các "Dấu hiệu nhận biết" ta kết luận:

Câu b), c), e) : Đúng ; Câu a), d) : Sai

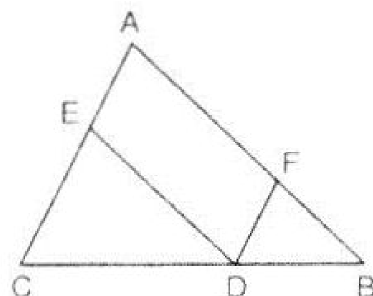
84. Cho tam giác ABC, D là một điểm nằm giữa B và C. Qua D kẻ các đường thẳng song song với AB và AC, chúng cắt các cạnh AC và AB theo thứ tự ở E và F.

a) Tứ giác AEDF là hình gì? Vì sao?

b) Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì tứ giác AEDF là hình thoi?

c) Nếu tam giác ABC vuông tại A thì tứ giác AEDF là hình gì? Điểm D ở vị trí nào trên cạnh BC thì tứ giác AEDF là hình vuông?

Giải

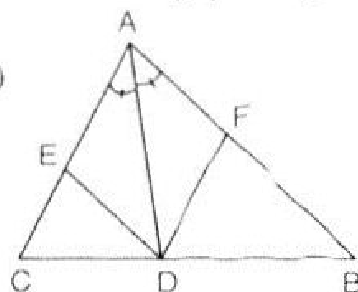


a) Theo giả thiết ta có: DE // AB ; DF // AC

Vậy tứ giác AEDF là hình bình hành.

b) Vì AEDF là hình bình hành nên nếu AD là đường phân giác của $\hat{A}$ thì hình bình hành AEDF là hình thoi.

Vậy khi đó D là giao điểm của đường phân giác $\hat{A}$ với cạnh BC của ΔABC (Vì hình bình hành có một đường chéo vừa là đường phân giác thì nó là hình thoi).



c) Vì AEDF là hình bình hành (chứng minh ở câu a) và $\hat{A} = 90^0$ nên tứ giác AEDF là hình chữ nhật.
Để cho hình chữ nhật AEDF là hình vuông thì điểm D là giao điểm của đường phân giác góc A với cạnh huyền BC. (Xem dấu hiệu nhận biết).

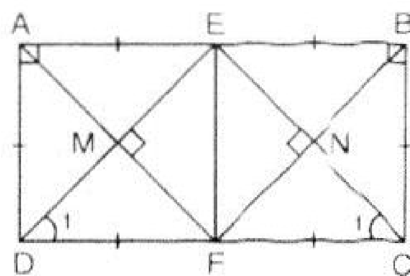
85. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE.

a) Tứ giác ADFE là hình gì? Vì sao?

b) Tứ giác EMFN là hình gì? Vì sao?

Giải

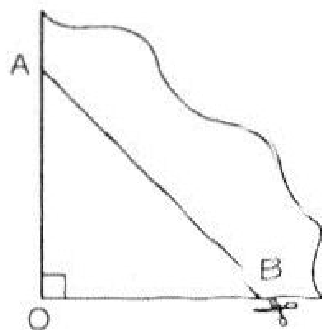
a) Vì ABCD là hình chữ nhật nên: $AB = CD \Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD}{2}$ hay AE = DF



Và AB // CD nên AE // DF
Suy ra tứ giác ADFE là hình bình hành
Hơn nữa $\hat{A} = 90^0$
Suy ra tứ giác ADFE là hình chữ nhật.
Ta cũng có: AE = AD
Vậy tứ giác ADFE là hình vuông.

b) – Vì ADEF là hình vuông nên: DE ⊥ FA
– Vì ADFE và BCFE là hình vuông nên DE và CE đều là đường chéo các hình vuông trên nên: $\hat{D}_1 = \hat{C}_1 = \frac{90^0}{2} = 45^0$
Xét ΔEDC ta có: $\hat{D}_1 + \hat{C}_1 = 45^0 + 45^0 = 90^0$. Suy ra: $\hat{E} = 90^0$
– Tứ giác EMFN có ba góc vuông. Vậy EMFN là hình chữ nhật (1)
Hơn nữa hai hình vuông ADFE và BCFE bằng nhau nên ME = NE (2)
– Hình chữ nhật EMFN có hai cạnh liên tiếp bằng nhau.
Vậy EMFN là hình vuông.

86. Đố. Lấy một tờ giấy gấp làm tư rồi cắt chéo theo nhát cắt AB (hình bên). Tứ giác nhận được là hình gì? Vì sao? Nếu ta có OA = OB thì tứ giác nhận được là hình gì?



Hướng dẫn

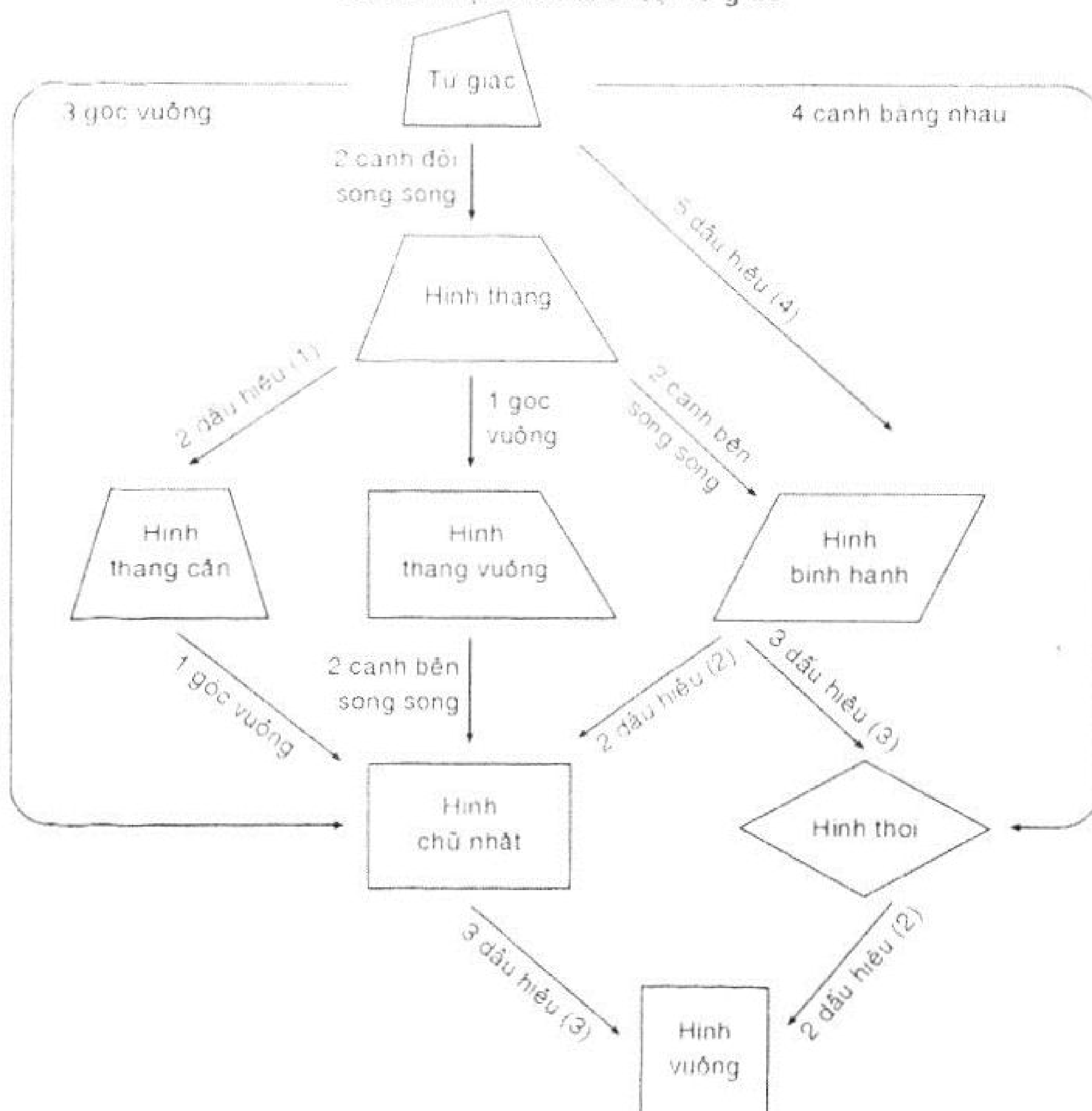
– Khi cắt tờ giấy gấp làm tư theo cạnh AB thì khi mở ra ta được một tứ giác có 4 cạnh bằng nhau và có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và vuông góc với nhau. Vậy tứ giác đó là một hình thoi.
– Nếu có thêm OA = OB thì hình thoi đó sẽ có hai đường chéo bằng nhau. Vậy tứ giác đó trở thành hình vuông.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Các nội dung chính

1 Tứ giác.
2 Hình thang, hình thang cân.
3 Hình bình hành và các dạng đặc biệt (hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông).

Sơ đồ nhận biết các loại tứ giác



Chú thích: (1) – Hai góc kề một đáy bằng nhau.
– Hai đường chéo bằng nhau.
(2) – Một góc vuông.
– Hai đường chéo bằng nhau.
(3) – Hai cạnh kề bằng nhau.
– Hai đường chéo vuông góc với nhau.
– Một đường chéo là đường phân giác của một góc.
(4) – Các cạnh đối song song.
– Các cạnh đối bằng nhau.
– Các góc đối bằng nhau.
– Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
– Hai cạnh đối song song và bằng nhau.

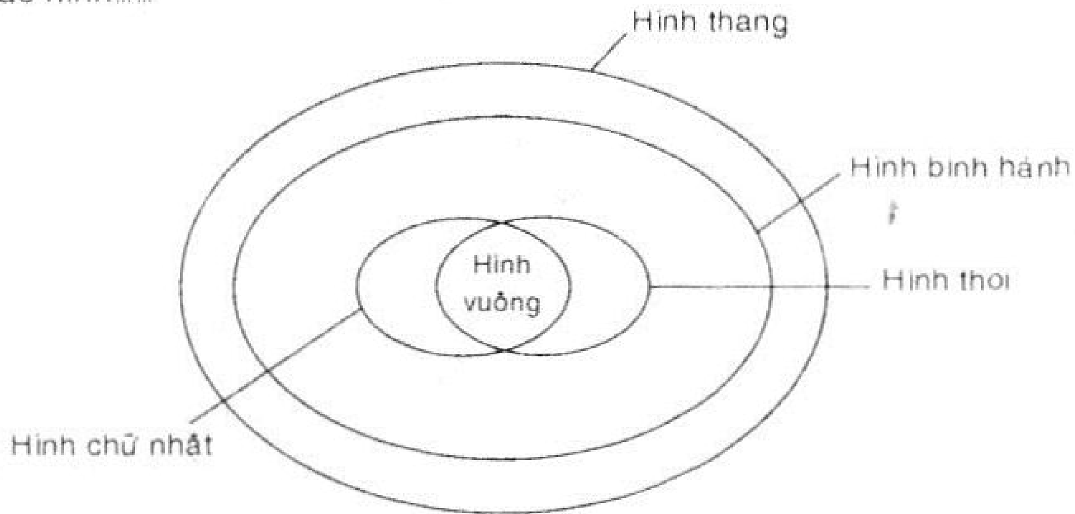
BÀI TẬP

87. Sơ đồ ở hình 110 biểu thị quan hệ giữa các tập hợp hình thang, hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông. Dựa vào sơ đồ đó, hãy điền vào chỗ trống:

a) Tập hợp các hình chữ nhật là tập hợp con của tập hợp các hình ......

b) Tập hợp các hình thoi là tập hợp con của tập hợp các hình......

c) Giao của tập hợp các hình chữ nhật và tập hợp các hình thoi là tập hợp các hình......



Giải

Dựa vào sơ đồ và lý thuyết đã học, ta có thể điền vào chỗ trống các nội dung như sau:

a) Tập hợp các hình chữ nhật là tập hợp con của tập hợp các hình: hình bình hành, hình thang.

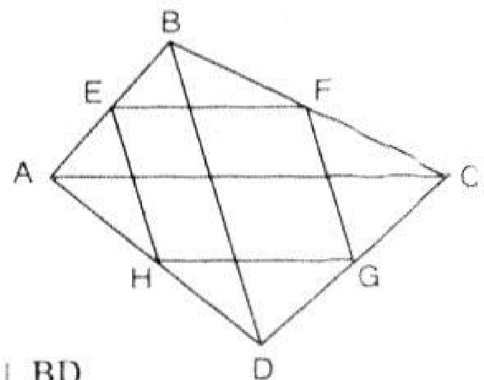
b) Tập hợp các hình thoi là tập hợp con của tập hợp các hình: Hình bình hành, hình thang.

c) Giao của tập hợp các hình chữ nhật và tập hợp các hình thoi là tập hợp các hình: hình vuông.

88. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Các đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD có điều kiện gì thì EFGH là:

a) hình chữ nhật? b) hình thoi? c) hình vuông?

Giải



a) EFGH là hình chữ nhật khi $AC \perp BD$
(Vì khi đó EFGH là hình bình hành có một góc vuông)

b) EFGH là hình thoi khi $AC = BD$
(Khi đó EFGH là hình bình hành có hai cạnh liên tiếp bằng nhau)

c) EFGH là hình vuông khi $AC = BD$ và $AC \perp BD$.
(Khi đó EFGH là hình thoi và có hai đường chéo bằng nhau).

89. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Gọi D là trung điểm của AB, E là điểm đối xứng với M qua D.

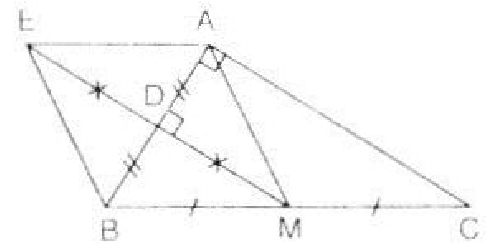
a) Chứng minh rằng điểm E đối xứng với M qua AB.

b) Các tứ giác AEMC, AEBM là hình gì? Vì sao?

c) Cho BC = 4cm, tính chu vi tứ giác AEBM.

d) Tam giác vuông ABC có điều kiện gì thì AEBM là hình vuông?

Giải



a) Vì MB = MC

DA = DB

Vậy: MD là đường trung bình của ΔABC

$\Rightarrow \begin{rcases} MD \parallel AC \\ \text{Mà } AC \perp AB \end{rcases} \Rightarrow MD \perp AB$ (1)

Hơn nữa E là điểm đối xứng của M qua D.

Suy ra DE = DM (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB là đường trung trực của EM hay E là điểm đối xứng của M qua AB. (đpcm)

b) * Tứ giác AEBM là hình gì?

Vì AB là đường trung trực của EM nên: AE = AM

BE = BM

Hơn nữa AM là đường trung tuyến của ΔABC nên:

$$AM = MB = \frac{BC}{2} \Rightarrow AE = AM = BE = BM$$

Xét tứ giác AEBM ta có: AE = AM = BE = BM

Vậy tứ giác AEBM là hình thoi.

* Tứ giác AEMC là hình gì?

Xét tứ giác AEMC, ta có: ME // CA (vì cùng vuông góc với AB) (1)

Vì MD là đường trung bình của ΔABC nên: AC = 2MD = ME (2)

Từ (1) và (2), ta có tứ giác AEMC là hình bình hành.

c) Tính chu vi tứ giác AEMB biết BC = 4cm

Ta có $BM = \frac{BC}{2} = 2$ (cm)

Vì AEBM là hình thoi, vậy chu vi tứ giác AEBM bằng:

4BM = 4.2 = 8cm

c) Để hình thoi AEBM trở thành hình vuông thì hai đường chéo của nó phải bằng nhau, nghĩa là: AB = ME

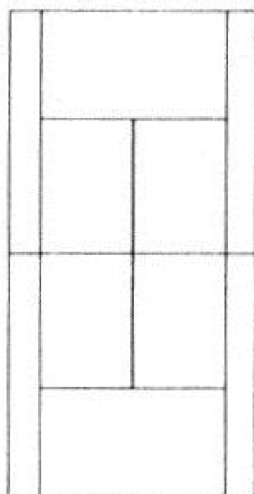
Mà AC = ME (cmt)

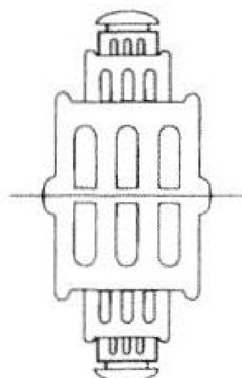
Suy ra AB = AC

Vậy khi đó tam giác vuông ABC phải trở thành tam giác vuông cân.

90. Đố. Tìm trục đối xứng và tâm đối xứng của:

a) Hình a (sơ đồ một sân quần vợt); b) Hình b





a) b)

Hướng dẫn

Các em thử gấp đôi từng hình lại và kiểm tra trục đối xứng của chúng, rồi gấp đôi lần nữa để tìm tâm đối xứng của chúng.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1. *Chọn câu trả lời đúng.* Trong tứ giác ABCD có : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = ?$

(A) 180° (B) 306° (C) 360° (D) 720°.

2. Cho tứ giác ABCD có : $\hat{A} = 80^\circ$; $\hat{B} = 90^\circ$. Các tia phân giác của các góc C và D cắt nhau tại I. Số đo của góc $\widehat{CID}$ là :

(A) 75° (B) 85° (C) 95° (D) 58°.

3. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AB = 7 cm, BC = 9 cm và DC = 11 cm. Các điểm H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC. Ta có :

(A) HK = 8 cm (B) HK = 10 cm (C) HK = 9 cm (D) HK = 7 cm.

4. *Tìm câu trả lời sai.* Với thước và compa, có thể dựng được :

(A) Tam giác ABC cân tại A, biết BC = 5 cm, BH = 4 cm (BH là đường cao của ΔABC, H $\in$ AC).

(B) Hình thang cân ABCD (AB // DC), biết CD = 3 cm, AC = 4 cm, $\hat{D} = 70^\circ$.

(C) Dựng ΔABC vuông tại A, biết AB = 8 cm, BC = 6 cm.

(D) Dựng ΔABC vuông tại A, biết cạnh huyền BC = 5 cm và $\hat{B} = 35^\circ$.

5. *Tìm câu trả lời sai.*

(A) Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.

(B) Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.

(C) Hình thang có hai cạnh bên song song là hình bình hành.

(D) Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

6. *Chọn câu trả lời đúng.*

(A) Hai điểm A và B gọi là đối xứng nhau qua O nếu O trùng với A hoặc B.

(B) Hai điểm A và B gọi là đối xứng nhau qua điểm O nếu O là trung điểm của đoạn thẳng AB.

(C) Hai điểm A và B gọi là đối xứng nhau qua O nếu A là trung điểm của đoạn thẳng BO.

(D) Hai điểm A và B gọi là đối xứng nhau qua điểm O nếu B là trung điểm của đoạn thẳng AO.

7. *Chọn câu trả lời đúng.*

(A) Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

(B) Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng $\frac{1}{3}$ cạnh huyền.

(C) Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng cạnh huyền.

(D) Trong tam giác vuông, đường cao ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

8. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi K, I lần lượt là chân đường cao kẻ từ H đến AB, AC. Điểm M là trung điểm của HC. Số đo góc $\widehat{KIM}$ là :

(A) 60° (B) 30° (C) 45° (D) 90°.

9. *Chọn câu trả lời đúng.* Tập hợp các điểm cách điểm O cố định một khoảng 5 cm là :

(A) đường trung trực AB đi qua điểm O.

(B) hai đường thẳng song song với a và cách a một khoảng 5 cm.

(C) đường thẳng cách điểm O một khoảng 5 cm.

(D) đường tròn tâm O bán kính bằng 5 cm.

10. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho tam giác ABC. Gọi P là điểm di chuyển trên BC, Q là trung điểm của AP. Điểm Q di chuyển trên đường nào ?

(A) Đường thẳng qua Q và song song với BC.

(B) Đường thẳng qua Q và song song với AC.

(C) Đường thẳng qua Q và song song với AC.

(D) Đường trung trực của đoạn thẳng BC.

11. *Tìm câu trả lời sai.*

(A) Trong hình thoi có hai đường chéo bằng nhau.

(B) Trong hình thoi, hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

(C) Trong hình thoi hai đường chéo vuông góc với nhau.

(D) Trong hình thoi có hai cạnh bên bằng nhau.

12. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60^\circ$. Trên cạnh AD lấy điểm M, trên cạnh DC lấy điểm N sao cho AM = DN. Số đo của góc $\widehat{MBN}$ là :

(A) 30° (B) 90° (C) 60° (D) 45°.

13. *Tìm câu trả lời sai.*

(A) Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau và bằng nhau là hình vuông.

(B) Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.

(C) Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.

(D) Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.

14. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho hình vuông ABCD. Điểm M tuỳ ý trên đường chéo AC. Gọi N, P lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh DC và BC. Tứ giác CPMN là hình gì ?

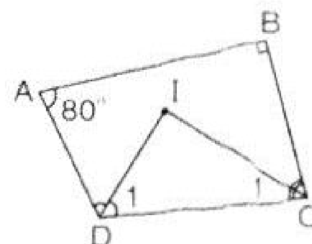
(A) Hình vuông (B) Hình bình hành

(C) Hình chữ nhật (D) Hình thoi.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1. *Chọn câu C.*

2. Ta có : $\hat{D} + \hat{C} = 360^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 190^\circ$



Mà $\hat{D}_1 + \hat{C}_1 = \dfrac{\hat{D} + \hat{C}}{2} = \dfrac{190^\circ}{2} = 95^\circ$

ΔCID có $\widehat{CID} = 180^\circ - \left(\hat{D}_1 + \hat{C}_1\right) = 85^\circ$. *Chọn câu B.*

3. HK // AB // DC

$HK = \dfrac{AB + DC}{2} = \dfrac{7 + 11}{2} = 9$ cm. *Chọn câu C.*

4. ΔABC vuông tại A nên BC > AB. *Chọn câu C.*

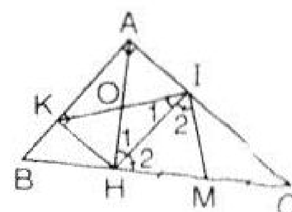
5. *Chọn câu B.*

6. *Chọn câu B.*

7. *Chọn câu A.*

8. Ta có : AIHK là hình chữ nhật

$\Rightarrow$ OI = OH $\Rightarrow \Delta$OIH cân $\Rightarrow \hat{I}_1 = \hat{H}_1$



mà ΔHIC vuông tại I (AIHK là hình chữ nhật)

IM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền

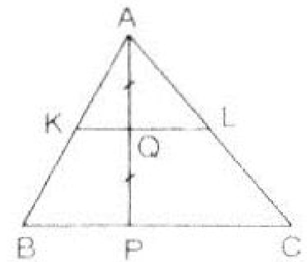
$\Rightarrow$ IM = HM $\Rightarrow \Delta$IMH cân tại M $\Rightarrow \hat{I}_2 = \hat{H}_2$

Mặt khác : $\widehat{AHM} = 90^\circ \Leftrightarrow \hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 90^\circ$

Suy ra : $\widehat{KIM} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2 = 90^\circ$. *Chọn câu D.*

9. *Chọn câu D.*

10. Gọi K, L là trung điểm AB, AC.



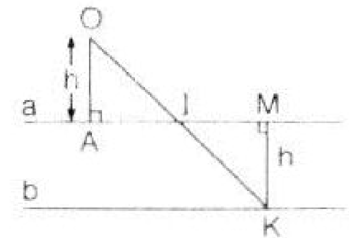
Ta có : KQ // BP (AK = KB, AQ = QP)

QL // PC (AL = LC, AQ = QP) ⇒ KL // BC.

Vì ΔABC cố định ⇒ K, L cố định.

Vậy điểm Q di chuyển trên đoạn thẳng KL.

Chọn câu A.



11. *Chọn câu A.*

12. AB = AD, $\hat{A} = 60^0$

⇒ ΔABD đều ⇒ $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = 60^0$

AB = BD

ΔABM = ΔNBD (c-g-c)

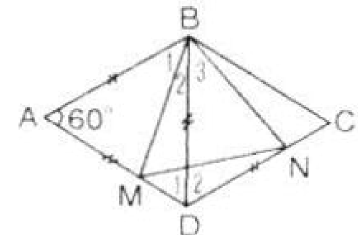
⇒ $\hat{B}_1 = \hat{B}_3$; BM = BN

Mà $\widehat{ABD} = 60^0$

⇒ $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 60^0$

⇒ $\hat{B}_3 + \hat{B}_2 = 60^0 \Rightarrow \widehat{MBN} = 60^0$.

Chọn câu C.

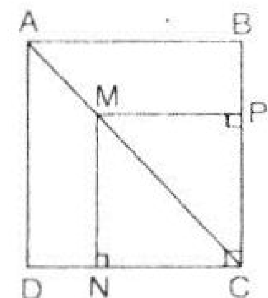


13. *Chọn câu B.*

14. Ta có : $\widehat{MNC} = \widehat{NCP} = \widehat{CPM} = 90^0$

⇒ tứ giác CPMN là hình vuông.

Chọn câu A.



Chương II.

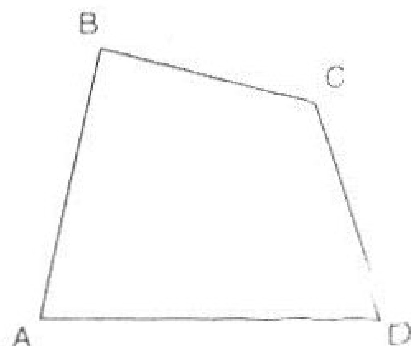
ĐA GIÁC – DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

§1. ĐA GIÁC - ĐA GIÁC ĐỀU

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Khái niệm về đa giác*

   Định nghĩa: Đa giác lồi là đa giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng mà bờ là đường thẳng chứa bất kỳ cạnh nào của đa giác đó.



2. *Đa giác đều:*

   Định nghĩa: Đa giác đều là đa giác có tất cả các cạnh bằng nhau và tất cả các góc bằng nhau.

3. Tổng số đo các góc của hình n – giác là: $(n - 2).180^0$

   Suy ra số đo một số góc của đa giác đều n cạnh là: $\frac{(n-2).180^0}{n}$

4. Số đường chéo của hình n – giác là: $\frac{n(n-3)}{2}$

II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho ví dụ về đa giác không đều: a) Có tất cả các cạnh bằng nhau;
b) Có tất cả các góc bằng nhau.

Giải

a) Hình thoi có 4 cạnh bằng nhau, nhưng các góc không bằng nhau. Vậy hình thoi không phải là đa giác đều.

b) Hình chữ nhật là một tứ giác có 4 góc bằng nhau nhưng các cạnh không bằng nhau. Vậy hình chữ nhật không phải là đa giác đều.

B. Bài tập căn bản

1. Hãy vẽ phác một lục giác lồi.
   Hãy nêu cách nhận biết một đa giác lồi.

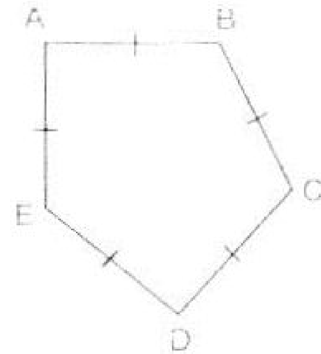
Hướng dẫn

Dùng định nghĩa đa giác lồi để vẽ cho đúng lục giác lồi.

2. Cho ví dụ về đa giác không đều trong mỗi trường hợp sau:

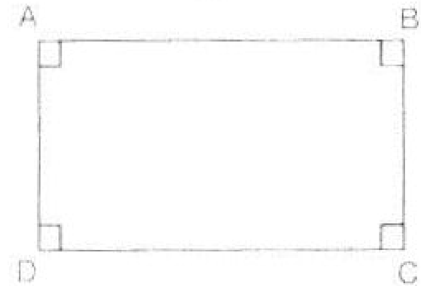
a) Có tất cả các cạnh bằng nhau.

b) Có tất cả các góc bằng nhau.



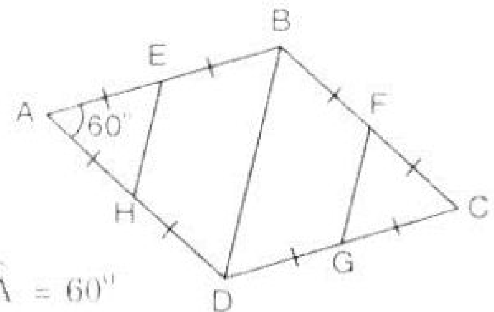
Giải

a) Hình bên là ngũ giác không đều có tất cả các cạnh bằng nhau.



b) Hình chữ nhật là tứ giác không đều có các góc bằng nhau.

3. Cho hình thoi ABCD có $\hat{A} = 60^0$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng đa giác EBFGDH là lục giác đều.



Giải

- Vì ABCD là hình thoi nên:

  AB = BC = CD = DA

  => EB = BF = GD = DH (1)

- Ta có: ΔABD là tam giác cân tại A và có $\hat{A} = 60^0$

  Vậy ΔABD là tam giác đều.

  => AB = BD = DA

  và EH, GF là đường trung bình của ΔABD, ΔCBD nên:

  $EH = FG = \frac{BD}{2}$ (2)

- Từ (1) và (2) ta có: EB = BF = FG = GD = DH = HE (*)

- Ta còn có các tam giác: ΔABD, ΔCBD, ΔAEH và ΔCFG là các tam giác đều nên:

  $\widehat{EBF} = \widehat{HDG} = 120^0$

  Và $\widehat{HEB} = \widehat{BFG} = \widehat{FGD} = \widehat{DHE} = 120^0$.

  (Vì đó là các góc ngoài của hai tam giác đều AEH và FGC)

  Vậy tứ giác EBFGDH có 6 góc bằng nhau (**)

  Từ (*) và (**) suy ra tam giác EBFGDH là hình lục giác đều (đpcm).

4. Điền số thích hợp vào các ô trống trong bảng sau:

				Đa giác n cạnh
Số cạnh	4			
Số đường chéo xuất phát từ một đỉnh		2		
Số tam giác được tạo thành			4	
Tổng số đo các góc của đa giác			4.180^0 $= 720^0$	

Hướng dẫn

Áp dụng các công thức để tính và điền vào ô trống.

				Đa giác n cạnh
Số cạnh	4	5	6	n
Số đường chéo xuất phát từ một đỉnh	1	2	3	$n - 3$
Số tam giác được tạo thành	2	3	4	$n - 2$
Tổng số đo các góc của đa giác	2.180^0 $= 360^0$	3.180^0 $= 540^0$	4.180^0 $= 720^0$	$(n - 2)$ 180^0

5. Tính số đo mỗi góc của ngũ giác đều, lục giác đều, n- giác đều.

Giải

Ta có hình n-giác đều có n-góc ở n-đỉnh và các góc này bằng nhau.

Tổng số đo các góc của đa giác đều n-cạnh bằng $(n - 2).180^0$

Vậy số đo của mỗi góc tại đỉnh là: $\dfrac{(n-2).180^0}{n}$

+ Với hình ngũ giác đều: $n = 5$

Số đo góc tại mỗi đỉnh là: $\dfrac{(5-2).180^0}{5} = \dfrac{3.180^0}{5} = 108^0$

+ Với hình lục giác đều: $n = 6$

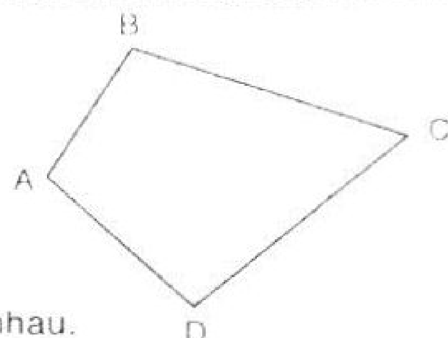
Số đo góc tại mỗi đỉnh là: $\dfrac{(6-2).180^0}{6} = \dfrac{4.180^0}{6} = 120^0$.

§2. DIỆN TÍCH HÌNH CHỮ NHẬT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Khái niệm diện tích đa giác*

Số đo của một phần mặt phẳng giới hạn bởi một đa giác được gọi là diện tích của đa giác đó.



- Mỗi đa giác có một diện tích xác định.

Diện tích đa giác là một số dương.

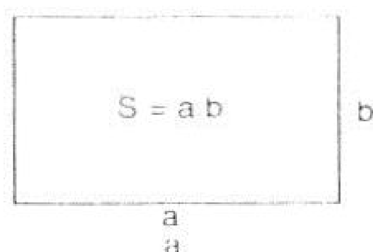
Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.

Nếu một đa giác được chia thành những đa giác không có điểm trong chung thì diện tích của nó bằng tổng diện tích của những đa giác đó.

2. *Công thức tính diện tích hình chữ nhật*

Định lí: Diện tích hình chữ nhật bằng tích hai kích thước của nó.

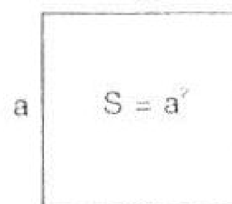
$$S = a.b$$



3. Công thức tính diện tích hình vuông hình tam giác vuông

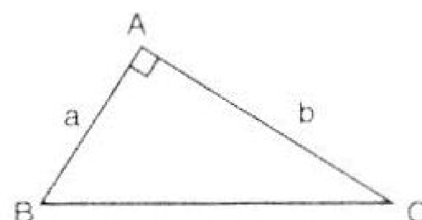
- Diện tích hình vuông bằng bình phương cạnh của nó.

$$S = a^2$$



- Diện tích tam giác vuông bằng nửa tích hai cạnh của góc vuông.

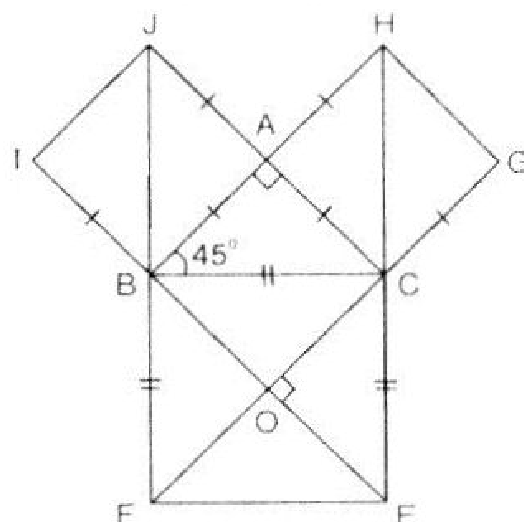
$$S = \frac{1}{2}ab.$$



II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Cho tam giác vuông cân. Chứng minh rằng tổng diện tích của hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông bằng diện tích của hình vuông dựng trên cạnh huyền.



Giải

Tam giác ABC vuông cân tại A, hình vuông BCEF dựng trên cạnh huyền BC có hai đường chéo BE và CF giao nhau tại O.

$\Rightarrow \widehat{CBE} = \widehat{BCF} = 45^0$

Vậy ΔBOC = ΔBAC (c.g.c) $\Rightarrow S_{BCEF} = 4S_{ABC}$ (1)

Tương tự ta có: $\left.\begin{array}{l} S_{ABIJ} = 2S_{ABC} \\ S_{ACGH} = 2S_{ABC} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABIJ} + S_{ACGH} = 4\,S_{ABC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $S_{BCEF} = S_{ABIJ} + S_{ACGH}$ (đpcm)

B. Bài tập căn bản

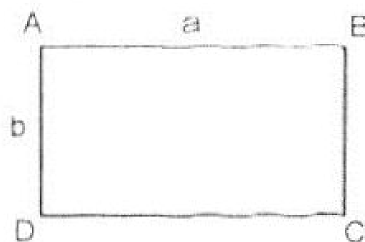
6. Diện tích hình chữ nhật thay đổi như thế nào nếu:

a) Chiều dài tăng 2 lần, chiều rộng không đổi?

b) Chiều dài và chiều rộng tăng 3 lần?

c) Chiều dài tăng 4 lần, chiều rộng giảm 4 lần?

Giải



Gọi ABCD là hình chữ nhật có chiều dài là a và chiều rộng là b.

Khi đó diện tích S = a.b

a) Khi chiều dài tăng hai lần và chiều rộng không đổi, ta có:

$$S_1 = 2a.b = 2ab = 2S.$$

Vậy khi chiều dài tăng lên 2 lần và chiều rộng không đổi thì diện tích hình chữ nhật ABCD tăng lên gấp 2 lần.

b) Khi chiều dài và chiều rộng tăng 3 lần ta có:

$$S_2 = (3a).(3b) = 9ab = 9.S$$

Vậy khi chiều dài và chiều rộng tăng 3 lần thì diện tích hình chữ nhật ABCD tăng lên 9 lần.

c) Khi chiều dài tăng 4 lần và chiều rộng giảm 4 lần, ta có:

$$S_3 = (4a).(\frac{b}{4}) = ab = S$$

Vậy khi chiều dài tăng 4 lần và chiều rộng giảm 4 lần thì diện tích hình chữ nhật ABCD không thay đổi.

7. Một gian phòng có nền hình chữ nhật với kích thước là 4,2m và 5,4m, có một cửa sổ hình chữ nhật kích thước là 1m và 1,6m và một cửa ra vào hình chữ nhật kích thước 1,2m và 2m.

Ta coi một gian phòng đạt mức chuẩn về ánh sáng nếu diện tích các cửa bằng 20% diện tích nền nhà. Hỏi gian phòng trên có đó đạt mức chuẩn về ánh sáng hay không?

Giải

Ta có diện tích của nền nhà là: $S = 4,2.5,4 = 22,68\ (m^2)$

Ta có diện tích cửa sổ và cửa ra vào là:

$$S' = 1.1,6 + 1,2.2 = 1,6 + 2,4 = 4\ (m^2)$$

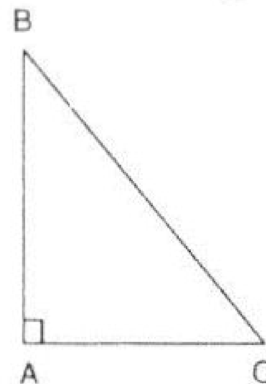
- Tỉ số diện tích cửa và cửa ra vào với diện tích cửa nền gian phòng là:

$$\frac{S'}{S} = \frac{4}{22,68} = 0,176 \approx 0,18 = 18\%$$

Suy ra $S' = 18\% S$.

Điều này chứng tỏ rằng gian phòng không đạt mức chuẩn về ánh sáng.

8. Đo cạnh (đơn vị mm) rồi tính diện tích hình tam giác vuông dưới đây:



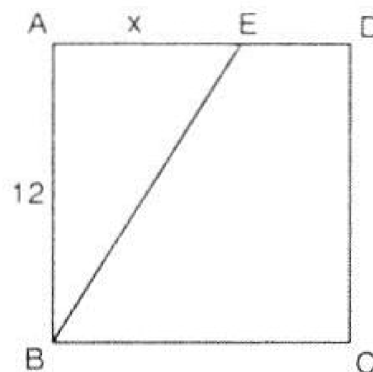
Hướng dẫn

Học sinh sử dụng thước đo đoạn thẳng và áp dụng công thức tính diện tích tam giác vuông để tính.

Đáp số: $S = \frac{1}{2}.30.25 = 375\ mm^2$.

Luyện tập

9. ABCD là một hình vuông cạnh 12cm, AE = x (cm). Tính x sao cho diện tích tam giác ABE bằng $\frac{1}{3}$ diện tích hình vuông ABCD.



Giải

- Ta có diện tích hình vuông ABCD là:

$$S_{ABCD} = 12.12 = 144\ (cm^2)$$

- Diện tích tam giác vuông ABE là:

$$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2}.12.x = 6x$$

- Theo đề bài ta có: $S_{\Delta ABE} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}$

$$\text{hay} \quad 6x = \frac{1}{3}.144 \Rightarrow x = \frac{48}{6} = 8\ (cm)$$

Vậy x = 8cm.

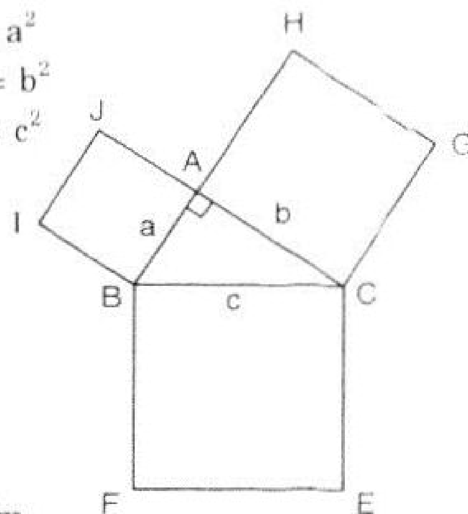
10. Cho một tam giác vuông. Hãy so sánh tổng diện tích của hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông với diện tích hình vuông dựng trên cạnh huyền.

Gợi ý: Sử dụng định lí Py-ta-go.

Giải

Giả sử a, b, c lần lượt là độ dài ba cạnh AB, AC và BC của tam giác vuông ABC. Khi đó:

– Diện tích của hình vuông ABIJ là: $S_{ABIJ} = a^2$
– Diện tích của hình vuông ACGH là: $S_{ACGH} = b^2$
– Diện tích hình vuông BCEF là: $S_{BCEF} = c^2$



Áp dụng định lí Py-ta-go trong tam giác vuông ABC, ta có: $c^2 = a^2 + b^2$

hay $S_{BCEF} = S_{ABIJ} + S_{BCEF}$

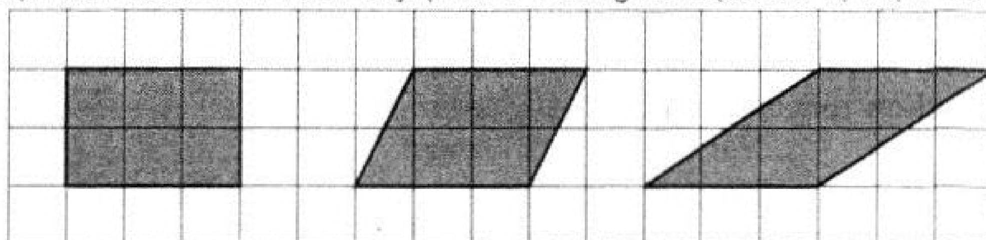
Vậy tổng diện tích của hai hình vuông dựng trên hai cạnh góc vuông bằng diện tích của hình vuông dựng trên cạnh huyền.

11. Cắt hai tam giác vuông bằng nhau từ một tấm bìa. Hãy ghép hai tam giác đó để tạo thành:
a) Một tam giác cân.
b) Một hình chữ nhật.
c) Một hình bình hành.
Diện tích của các hình này có bằng nhau không? Vì sao?

Hướng dẫn

Diện tích các hình trên là bằng nhau vì cùng bằng diện tích hai tan giác vuông bằng nhau được cắt từ tấm bìa.

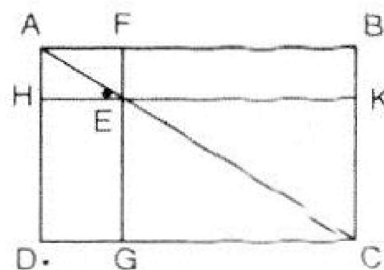
12. Tính diện tích các hình dưới đây (mỗi ô vuông là một đơn vị diện tích)



Hướng dẫn

Áp dụng bài 11 bằng cách cắt, ghép hình để tính diện tích các hình:
a) $S_{hcn} = 6$ (đơn vị diện tích)
b) $S_{hbhb)} = 6$ (đvdt)
c) $S_{hbhc)} = 6$ (đvdt)

13. Cho hình 125, trong đó ABCD là hình chữ nhật, E là một điểm bất kì nằm trên đường chéo AC, FG // AD và HK // AB. Chứng minh rằng hai hình chữ nhật EFBK và EGDH có cùng diện tích.



Giải

– Vì ABCD là hình chữ nhật, AC là đường chéo nên ta có:

$$\Delta ABC = \Delta DCA \Rightarrow S_{\Delta BAC} = S_{\Delta DCA} \ (1)$$

Vì FG // AD và HK // AB nên ta cũng có:

Tứ giác EFAH và EGCK là hình chữ nhật nên:

$$\Delta HAE = \Delta FEA \Rightarrow S_{\Delta HEA} = S_{\Delta FEA} \ (2)$$

Và $\Delta GEC = \Delta KCE \Rightarrow S_{\Delta GEC} = S_{\Delta KCE} \ (3)$

Từ (1), (2), (3), ta có: $S_{\Delta BAC} - (S_{\Delta KCE} + S_{\Delta FEA}) = S_{\Delta DCA} - (S_{\Delta GEC} + S_{\Delta HEA})$

$\Rightarrow S_{hcn}(EFBK) = S_{hcn}(EGDH)$ (đpcm)

14. Một đám đất hình chữ nhật dài 700m, rộng 400m. Hãy tính diện tích đám đã đo theo đơn vị m^2, km^2, a, ha.

Giải

Diện tích đám đất hình chữ nhật đã cho là: $S = 700.400 = 280\,000\ (m^2)$

- Vì $1km^2 = 1\,000\,000\ m^2$ nên $S = 0,28\ (km^2)$
- Vì $1ha = 10000m^2$ nên $S = 28$ ha
- Vì $1a = 100m^2$ nên $S = 2800a$

15. Đề. Vẽ hình chữ nhật ABCD có AB = 5cm, BC = 3cm.

a) Hãy vẽ một hình chữ nhật có diện tích nhỏ hơn nhưng có chu vi lớn hơn hình chữ nhật ABCD. Vẽ được mấy hình như vậy?

b) Hãy vẽ hình vuông có chu vi bằng chu vi hình chữ nhật ABCD. Vẽ được mấy hình vuông như vậy? So sánh diện tích hình chữ nhật với diện tích hình vuông có cùng chu vi vừa vẽ. Tại sao trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất?

Giải

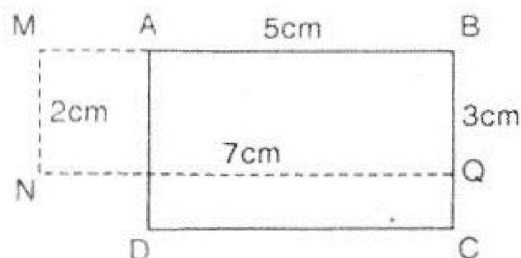
a) - Hình chữ nhật có kích thước 5cm và 3cm thì:

$$S_{ABCD} = 5.3 = 15\ (cm^2)$$

$$CV_{ABCD} = 2(5 + 3) = 16\ (cm)$$

- Ta có thể vẽ được vô số hình chữ nhật có diện tích bé hơn nhưng chu vi lớn hơn hình chữ nhật ABCD cho trước.

Ví dụ: Hình chữ nhật có (chiều dài; chiều rộng) như sau: (D : 7cm; R : 2cm); (8; 1).

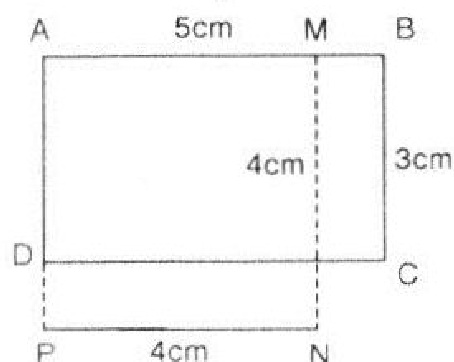


b) Ta có cạnh hình vuông bằng chu vi hình chữ nhật là $\dfrac{(3+5).2}{4} = 4\ (cm)$

Hình vuông AMNP có cạnh dài 4cm. Khi đó hình vuông có chu vi bằng hình chữ nhật ABCD.

$$CV_{hvAMNP} = 4.4 = 16\ (cm)$$

Ta vẽ được nhiều hình vuông thỏa mãn điều kiện trên (Xem chứng minh sau).



- Ta có: $S_{ABCD} = 5.3 = 15$ (cm^2)

  Và $S_{AMNP} = 4.4 = 16$ (cm^2)

  Vậy $S_{hv(AMNP)} > S_{hcn(ABCD)}$

- Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

  Thật vậy, ta có: $(a + b)^2 = 4ab - (a - b)^2 = k^2$ (1)

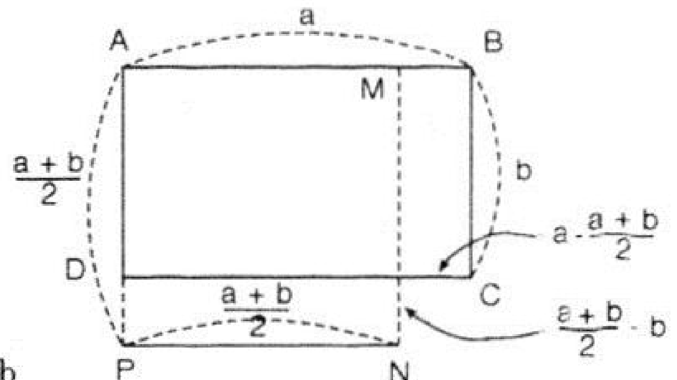
  Với a + b = 1: không đổi và là nửa chu vi hình chữ nhật ABCD

  Vì $(a - b)^2 \geq 0$, với mọi a, b nên từ (1) suy ra: $ab \leq \frac{k^2}{4}$

  Tích a.b lớn nhất bằng $\frac{k^2}{4}$ khi và chỉ khi a = b

  Do đó diện tích hình chữ nhật có chu vi không đổi và đạt giá trị lớn nhất khi nó là hình vuông.

  Hình vẽ bên chứng tỏ rằng hình chữ nhật cạnh a, b (a > b) có diện tích nhỏ hơn diện tích hình vuông cạnh $\frac{a+b}{2}$.



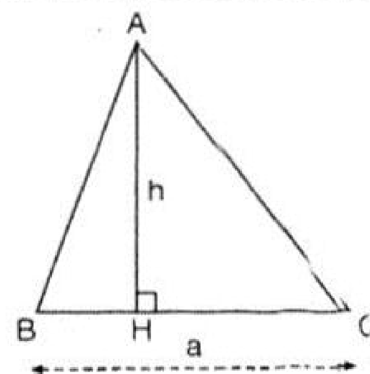
§3. DIỆN TÍCH TAM GIÁC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Định lí*

   Diện tích của tam giác bằng nửa tích một cạnh với chiều cao ứng với cạnh đó.

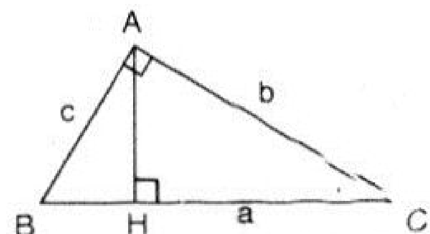
   $$S = \frac{1}{2}a.h$$



2. *Hệ quả*

   Diện tích tam giác vuông bằng nửa tích số hai cạnh góc vuông.

   $$S = \frac{1}{2}b.c$$



II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

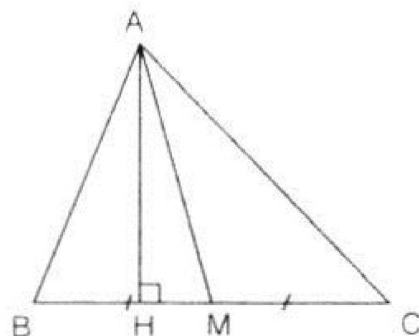
a) Chứng minh rằng trung tuyến của một tam giác chia tam giác thành hai hình có diện tích bằng nhau.

b) Cho ΔABC với ba đường cao AA'; BB'; CC'. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = 1$$

Giải

GT	BM = MC
KL	$S_{AMB} = S_{AMC}$



a) Chứng minh $S_{ABM} = S_{AMC}$

Ta có $S_{ABM} = \frac{1}{2}BM.AH$ (1)

$S_{AMC} = \frac{1}{2}MC.AH$ (2)

Mà $MC = MB = \frac{BC}{2}$ (3)

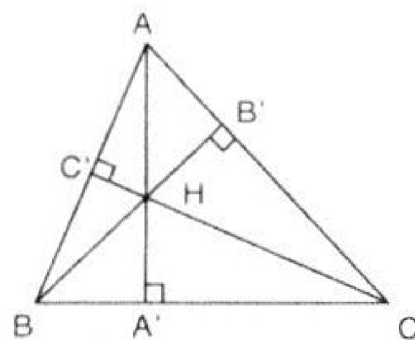
Từ (1), (2), (3) suy ra: $S_{ABM} = S_{AMC}$ (đpcm)

b) Gọi S là diện tích ΔABC:

Ta có: $S_{ABC} = S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}$ (1)

Mà $S = \frac{1}{2}AA'.BC = \frac{1}{2}BB'.AC = \frac{1}{2}CC'.AB$

$\Rightarrow$ $BC = \frac{2S}{AA'}$; $AC = \frac{2S}{BB'}$; $AB = \frac{2S}{CC'}$



Do đó: $S_{HBC} = \frac{1}{2}BC.HA' = \frac{S.HA'}{AA'}$ (2)

$S_{HAC} = \frac{1}{2}AC.HB' = \frac{S.HB'}{BB'}$ (3)

$S_{HAB} = \frac{1}{2}AB.HC' = \frac{S.HC'}{CC'}$ (4)

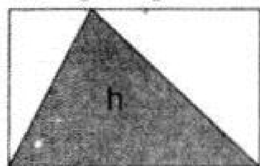
Cộng (2), (3), (4) vế với vế ta được:

$$S = S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB} = S\left(\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}\right)$$

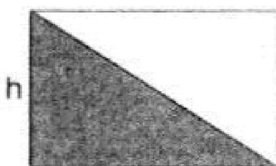
Suy ra $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = 1$ (đpcm).

B. Bài tập căn bản

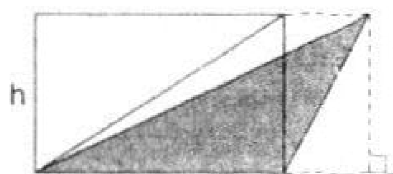
16. Giải thích vì sao diện tích của các tam giác được tô đậm trong các hình a), b), c) chứng tỏ được diện tích của tam giác bằng nửa diện tích hình chữ nhật tương ứng:



a)



b)



c)

Giải

Các cạnh của hình chữ nhật ở hình a), b), c) có chiều dài là a và chiều rộng là h. Vậy diện tích của các hình chữ nhật đó là:

$$S = a.h \qquad (1)$$

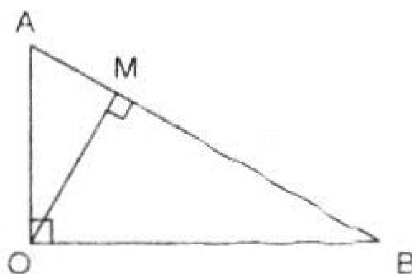
Các tam giác ở các hình a), b), c) có cạnh đáy là a và chiều cao tương ứng là h. Vậy diện tích của các tam giác đó là:

$$S_1 = \frac{1}{2}.ah \Rightarrow 2.S_1 = ah \qquad (2)$$

So sánh (1) và (2) ta có: $2S_1 = S \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}S$

Điều này chứng tỏ rằng diện tích của tam giác bằng nửa diện tích của hình chữ nhật tương ứng.

17. Cho tam giác AOB vuông tại O với đường cao OM (hình bên). Hãy giải thích vì sao ta có đẳng thức: AB.OM = OA.OB



Giải

Nếu lấy cạnh AB và đường cao tương ứng với nó là OM thì diện tích tam giác OAB là:

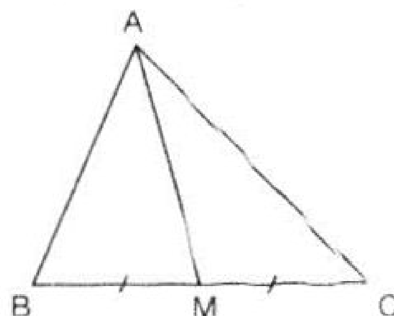
$$S = \frac{1}{2}AB.\,OM \qquad (1)$$

Vì tam giác OAB vuông tại O nên diện tích tam giác OAB là:

$$S = \frac{1}{2}OA.OB \qquad (2)$$

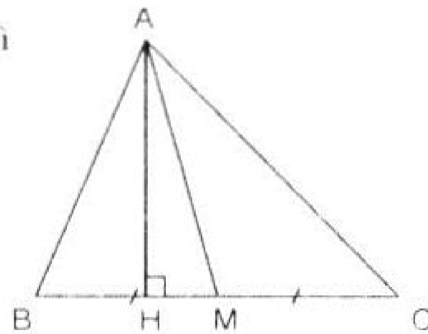
Từ (1) và (2) suy ra: AB.OM = OA.OB (đpcm).

18. Cho tam giác ABC và đường trung tuyến AM (hình bên). Chứng minh: $S_{AMB} = S_{AMC}$



Giải

Vẽ đường cao AH ứng với cạnh BC của ΔABC. Vì AM là trung tuyến của ΔABC nên MC = MB.



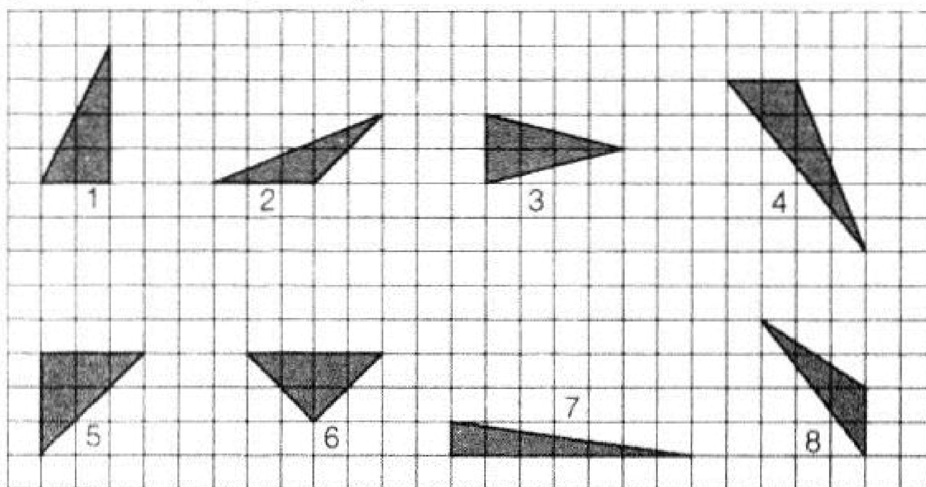
Ta có $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}BM.AH$

và $S_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}MC.AH = \frac{1}{2}BM.AH = S_{\Delta ABM}$

Vậy $S_{ABM} = S_{\Delta AMC}$ (đpcm)

Luyện tập

19. a) Xem hình dưới đây, hãy chỉ ra các tam giác có cùng diện tích (lấy ô vuông làm đơn vị diện tích):



b) Hai tam giác có diện tích bằng nhau thì có bằng nhau hay không?

Giải

a) Ta có:

$S_1 = \frac{1}{2}.2.4 = 4$ (đvdt) $\qquad S_2 = \frac{1}{2}.2.3 = 3$ (đvdt)

$S_3 = \frac{1}{2}.2.4 = 4$ (đvdt) $\qquad S_4 = \frac{1}{2}.2.5 = 5$ (đvdt)

$S_5 = \frac{1}{2}.3.3 = 4,5$ (đvdt) $\qquad S_6 = \frac{1}{2}.2.4 = 4$ (đvdt)

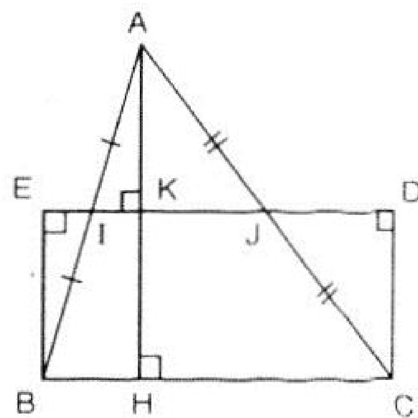
$S_7 = \frac{1}{2}.1.7 = 3,5$ (đvdt) $\qquad S_8 = \frac{1}{2}.2.3 = 3$ (đvdt)

Vậy tam giác ở hình 1, 3, 6 có cùng diện tích, hình 2 và 8 có cùng diện tích.

b) Nói chung thì hai tam giác có diện tích bằng nhau thì không bằng nhau.

20. Vẽ hình chữ nhật có một cạnh bằng một cạnh của một tam giác cho trước và có diện tích bằng diện tích của tam giác đó. Từ đó suy ra một cách chứng minh khác về công thức tính diện tích tam giác.

Giải



Ta dựng hình chữ nhật có một cạnh là cạnh của ΔABC, cạnh đối diện thuộc đường thẳng đi qua trung điểm của hai cạnh còn lại.

Để chứng minh diện tích ΔABC bằng diện tích hình chữ nhật BCDE, ta kẻ $AK \perp IJ$.

Ta có: $\Delta EIB = \Delta KIA \Rightarrow S_{\Delta EIB} = S_{\Delta KIA}$

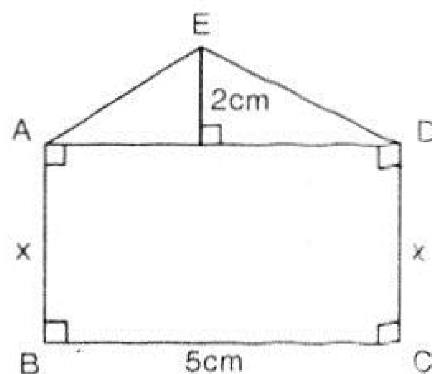
và $\Delta KJA = \Delta DJC \Rightarrow S_{\Delta KJA} = S_{\Delta DJC}$

Như vậy: $S_{\Delta ABC} = S_{BCDE} = BC.KH = \frac{1}{2}BC.AH$

Kết quả này cho chúng ta một cách chứng minh công thức tính diện tích tam giác.

21. Tính x sao cho diện tích hình chữ nhật ABCD gấp ba lần diện tích tam giác ADE (hình vẽ).

Giải



Ta có: $S_{ABCD} = AB.BC = 5x$ (cm)

và $S_{\Delta EAD} = \frac{AD.EF}{2} = \frac{1}{2}.2.5 = 5$ (cm)

Theo đề bài ta có:

$S_{ABCD} = 3.S_{\Delta EAD}$

hay $5x = 3.5 \Rightarrow x = 3$ (cm)

Vậy $x = 3$cm

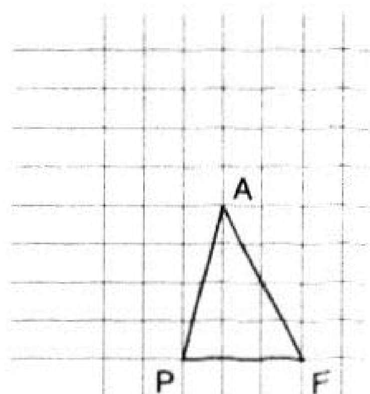
22. Tam giác PAF được vẽ trên giấy kẻ ô vuông (hình vẽ)

Hãy chỉ ra:

a) Một điểm I sao cho $S_{PIF} = S_{PAF}$.

b) Một điểm O sao cho $S_{POF} = 2.S_{PAF}$.

c) Một điểm N sao cho $S_{PNF} = \frac{1}{2}S_{PAF}$.



Giải

a) Có vô số điểm I nằm trên đường thẳng đi qua A và song song với PF sẽ thỏa mãn điều kiện: $S_{PIF} = S_{PAF}$.

b) Vì điểm A cách PF một khoảng bằng 4 đơn vị. Do đó điểm O thỏa mãn điều kiện: $S_{POF} = 2.S_{PAF}$ thì điểm O phải cách PF một khoảng bằng 8 đơn vị. Có vô số điểm như thế.

c) Vì điểm A cách PF một khoảng bằng 4 đơn vị. Do đó điểm N thỏa mãn điều kiện: $S_{PNF} = \frac{1}{2}S_{PAF}$ thì điểm N phải cách PF một khoảng bằng 2 đơn vị.

23. Cho tam giác ABC. Hãy chỉ ra một số vị trí của điểm M nằm trong tam giác đó sao cho: $S_{AMB} + S_{BMC} = S_{MAC}$

Giải

Theo giả thiết điểm M nằm trong ΔABC sao cho:

$$S_{AMB} + S_{BMC} = S_{MAC}$$

Ta có $\quad S_{AMB} + S_{BMC} + S_{MAC} = S_{ABC} \Rightarrow S_{MAC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$

Vì ΔMAC và ΔABC có chung đáy AC nên: $MK = \frac{1}{2}BH$.

Vậy điểm M nằm trên đường trung bình EF của ΔABC.

24. Tính diện tích của một tam giác cân có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b.

Giải

Giả sử ΔABC cân tại A.

Vẽ đường cao AH.

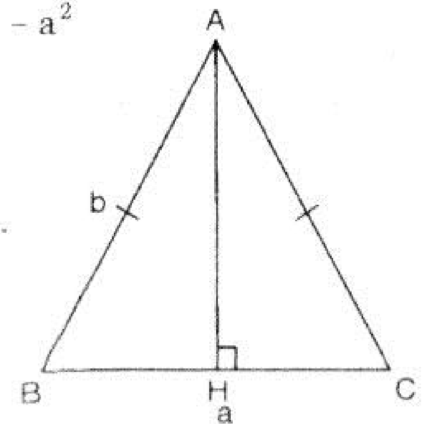
Khi đó AH cũng là đường trung tuyến và $BH = HC = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$

Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông HAB, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2$$

$$\Rightarrow \quad AH^2 = AB^2 - HB^2$$

$$\Rightarrow \quad AH = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{4}} = \frac{1}{2}.\sqrt{4b^2 - a^2}$$



Ta có diện tích tam giác cân ABC:

$$S = \frac{1}{2}AH.BC$$

$$S = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\sqrt{4b^2 - a^2}.a$$

$$S = \frac{a}{4}.\sqrt{4b^2 - a^2} \text{ (đvdt)}$$

25. Tính diện tích của một tam giác đều có cạnh bằng a.

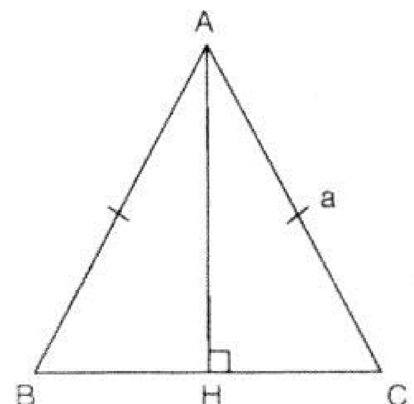
Giải

Vẽ đường cao AH, tương tự bài 24 ta tính được:

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Khi đó $\quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC.AH = \frac{1}{2}.a.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy $\quad S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (đvdt)

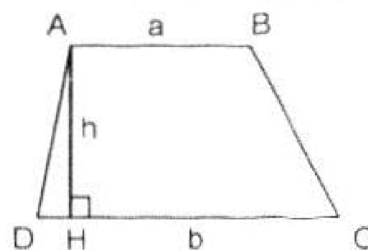


§4. DIỆN TÍCH HÌNH THANG

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

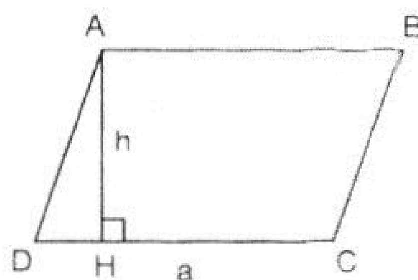
1. *Công thức diện tích hình thang*
   Diện tích hình thang bằng nửa tích của tổng hai đáy với chiều cao.

$$S = \frac{1}{2}(a + b).h$$



2. *Công thức tính diện tích hình bình hành*
   Diện tích hình bình hành bằng tích của một cạnh với chiều cao tương ứng của nó.

$$S = a.h$$

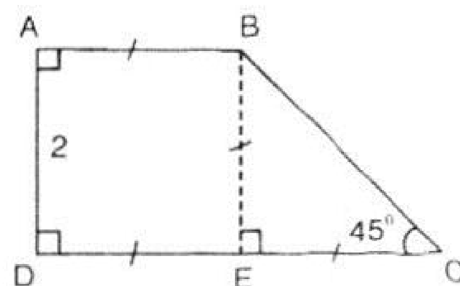


II. BÀI TẬP

A. Bài tập mẫu

Tính diện tích của một hình thang vuông biết hai đáy có độ dài 2cm và 4cm, góc tạo bởi một cạnh bên với đáy lớn có số đo bằng 45^0.

Giải



Ta có ΔEBC vuông cân, suy ra: EB = EC

mà EC = DC − DE = 4 − 2 = 2 (cm)

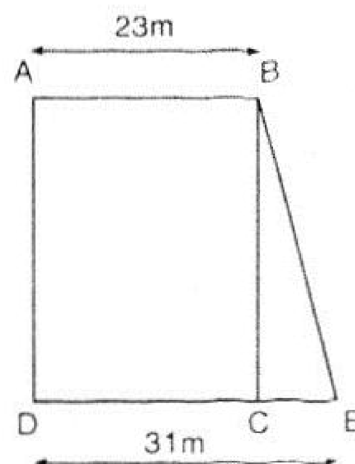
$\Rightarrow$ EB = EC = 2 (cm)

Vậy $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC).EB$

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(2 + 4).2 = 6\ (cm^2)$

B. Bài tập căn bản

26. Tính diện tích mảnh đất hình thang ABED theo các độ dài đã cho trên hình bên và biết diện tích hình chữ nhật ABCD là $828m^2$.



Giải

Ta có: $S_{ABCD} = AB.AD = 828\ (m^2)$

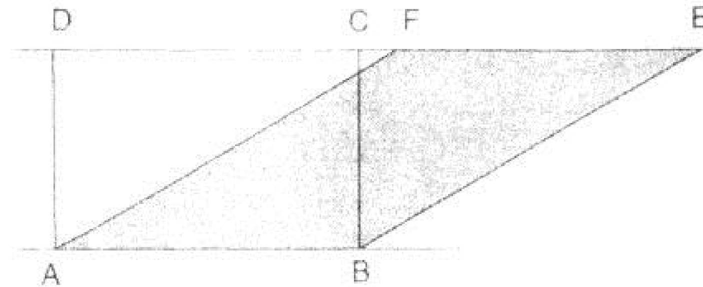
$\Rightarrow AD = \frac{828}{AB} = \frac{828}{23} = 36\ (m)$

Vậy diện tích hình thang ABED là:

$$S_{ABED} = \frac{1}{2}(AB + DE).AD = \frac{1}{2}(23 + 31).36 = 972 \ (m^2)$$

Vậy $S_{ABED} = 972 \ m^2$

27. Vì sao hình chữ nhật ABCD và hình bình hành ABEF (hình dưới) lại có cùng diện tích? Suy ra cách vẽ một hình chữ nhật có cùng diện tích với một hình bình hành cho trước.

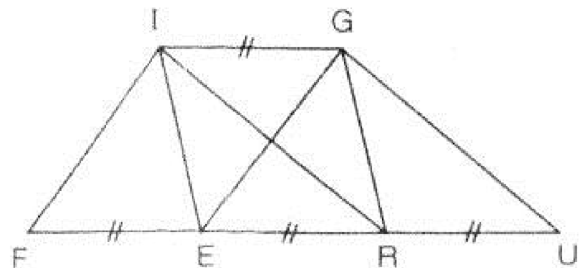


Giải

- Vì hình chữ nhật ABCD và hình bình hành ABEF có đáy chung là AB và có chiều cao bằng nhau. Vậy diện tích của chúng bằng nhau.
- Cách vẽ hình chữ nhật có cùng một diện tích với hình bình hành cho trước, ta vẽ như sau:

  Trước hết ta vẽ hình bình hành ABEF. Ta kéo dài cạnh EF. Từ A và B ta vẽ hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng EF nối dài cắt nó lần lượt tại C và D, ta có hình chữ nhật ABCD là hình cần dựng.

28. Xem hình bên (IG // FU). Hãy đọc tên một số hình có cùng diện tích với hình bình hành FIGE.



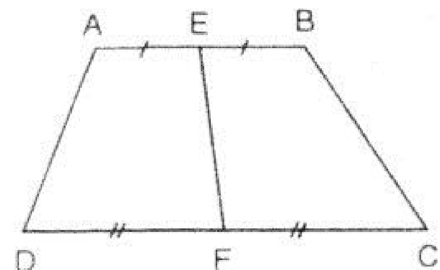
Giải

Xét các hình bình hành: FIGE, IGRE, IGUR và các tam giác IFR, GEU ta có:

- Chiều cao các hình bình hành và các tam giác trên bằng nhau (do IG // FU)
- Đáy của tam giác gấp đôi đáy của các hình bình hành.

Dựa vào công thức tính diện tích hình bình hành và diện tích hình tam giác ta được: $S_{FIGE} = S_{IGRE} = S_{IGUR} = S_{IFR} = S_{GEU}$.

29. Khi nối trung điểm của hai đáy hình thang, tại sao ta được hai hình thang có diện tích bằng nhau?



Giải

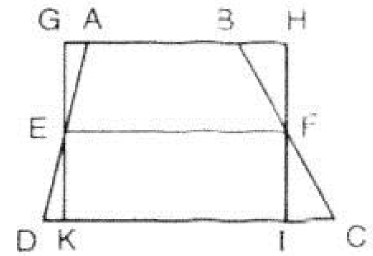
Xét hai hình thang: AEFD và BEFC ta có:

- Chúng cùng chiều cao.
- Có các đáy bằng nhau: AE = EB

  DF = FC

Vậy diện tích của chúng bằng nhau: $S_{AEFD} = S_{BEFC}$

30. Trên hình bên ta có hình thang ABCD với đường trung bình EF và hình chữ nhật GHIK. Hãy so sánh diện tích hai hình này, từ đó suy ra một cách chứng minh khác về công thức diện tích hình thang.



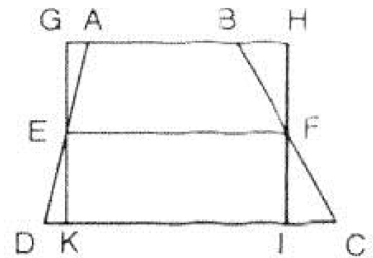
Giải

Cho hình thang ABCD (AB // CD) ta dựng hình chữ nhật GHIK có một cạnh bằng đường trung bình của hình thang và có diện tích bằng diện tích hình thang (như hình bên).

Ta dễ dàng chứng minh: $\Delta AEG = \Delta DEK$; $\Delta BFH = \Delta CFI$

Suy ra $S_{ABCD} = S_{GHIK} = EF.GK$

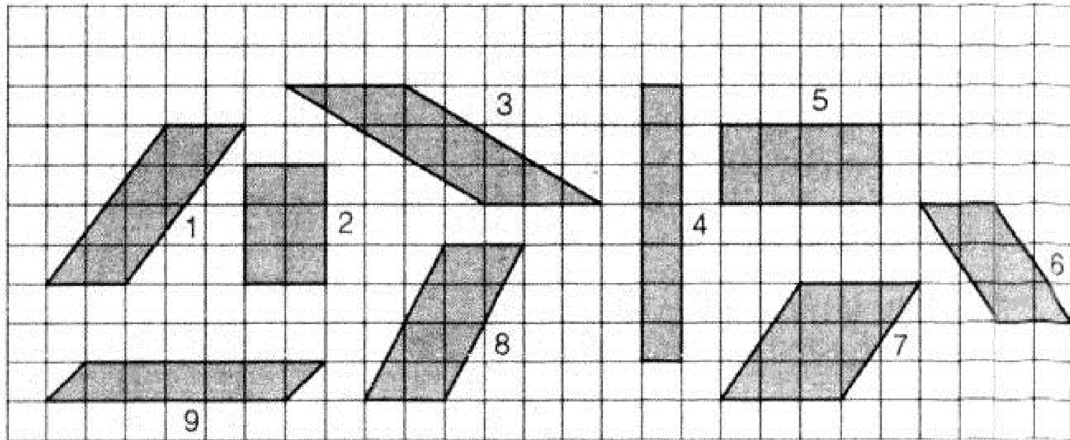
Mà $EF = \dfrac{AB + CD}{2}$ nên $S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(AB + CD).GK$



Ở đây ta gặp lại công thức tính diện tích hình thang đã học nhưng bằng một phương pháp khác, đó là:

Diện tích hình thang bằng tích đường trung bình với đường cao của nó.

31. Xem hình vẽ dưới. Hãy chỉ ra các hình có cùng diện tích (lấy ô vuông làm đơn vị diện tích)



Giải

Các hình 2, 6, 9 có cùng diện tích là 6 (ô vuông)

Các hình 1, 5, 8 có cùng diện tích là 8 (ô vuông)

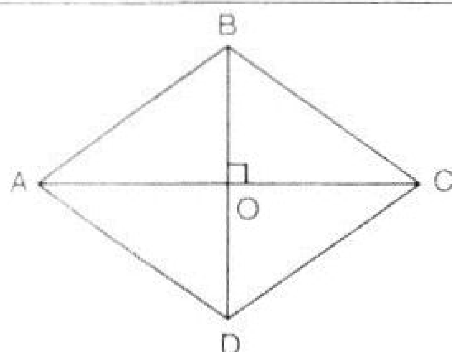
Các hình 3, 7 có cùng diện tích là 9 (ô vuông)

§5. DIỆN TÍCH HÌNH THOI

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

- Công thức tính diện tích hình thoi
  Diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo.

  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD$



II. BÀI TẬP

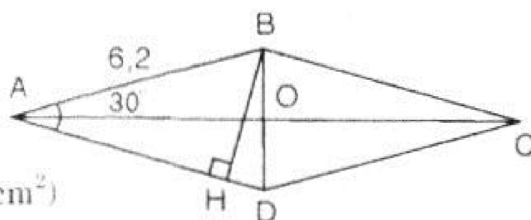
A. Bài tập mẫu

Tính diện tích hình thoi, biết cạnh của nó dài 6,2cm và một trong các góc của nó có số đo 30^0.

Giải

Cho hình thoi ABCD. Từ B kẻ Bh ⊥ AD. Xét tam giác vuông HBA có $\hat{A} = 30^0$ do đó có thể xem ΔHBA là nửa tam giác đều cạnh AB.

$\Rightarrow BH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}.6,2 = 3,1$ (cm)



Ta có:

$S_{ABD} = \frac{1}{2}AD.BH = \frac{1}{2}.6,2.3,1 = 9,61$ (cm^2)

Mà $S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2.9,61 = 19,22$ (cm^2)

Đáp số: $S_{ABCD} = 19,22$ (cm^2)

B. Bài tập căn bản

32. a) Hãy vẽ một tứ giác có độ dài hai đường chéo là: 3,6cm, 6cm và hai đường chéo đó vuông góc với nhau. Có thể vẽ được bao nhiêu tứ giác như vậy? Hãy tính diện tích mỗi tứ giác vừa vẽ.

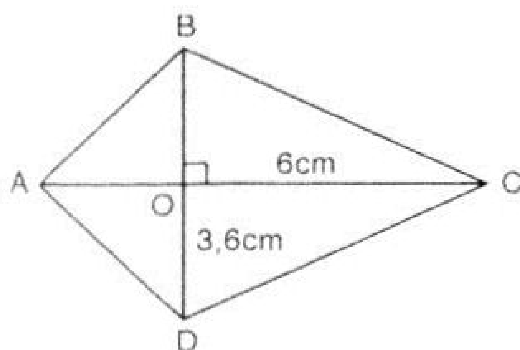
b) Hãy tính diện tích hình vuông có độ dài đường chéo là d.

Giải

a) Tứ giác ABCD có độ dài hai đường chéo là:

$AC = 6cm; BD = 3,6cm$

và AC ⊥ BD.



Ta vẽ được vô số tứ giác thỏa mãn điều kiện trên (bằng cách dời vị trí của BD trên AC)

Ta có $S_{ABCD} = \frac{1}{2}.AC.BD = \frac{1}{2}.6.3,6 = 10,8\ (cm^2)$

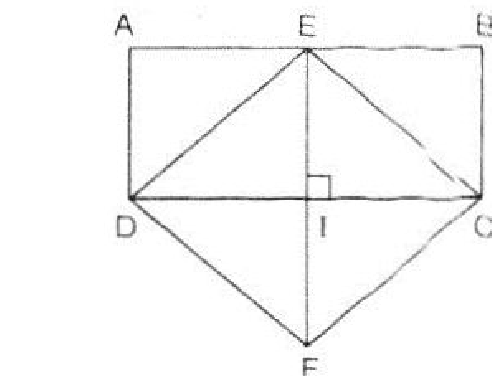
Vậy $S_{ABCD} = 10,8\ cm^2$

b) Hình vuông có hai đường chéo vuông góc với nhau $\Rightarrow S_{hv} = \frac{1}{2}d^2$.

Vậy diện tích hình vuông có đường chéo là d là nửa bình phương độ dài đường chéo đó.

33. Vẽ hình chữ nhật có một cạnh bằng đường chéo của một hình thoi cho trước và có diện tích bằng diện tích của hình thoi đó. Từ đó suy ra cách tính diện tích hình thoi.

Giải



Giả sử cho hình thoi DECF.

Vẽ hình chữ nhật có một cạnh là CD, cạnh kia bằng IE với $IE = \frac{EF}{2}$.

Ta dễ dàng nhận thấy rằng:

$$S_{DECF} = S_{ABCD} = CD.IE = \frac{1}{2}CD.EF$$

Vậy diện tích hình thoi bằng diện tích hình chữ nhật có một cạnh là độ dài một đường chéo và cạnh kia bằng độ dài nửa đường chéo còn lại của hình thoi.

34. Cho một hình chữ nhật. Vẽ tứ giác có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình chữ nhật. Vì sao tứ giác này là một hình thoi? So sánh diện tích hình thoi và diện tích hình chữ nhật, từ đó suy ra cách tính diện tích hình thoi

Giải

Ta vẽ hình chữ nhật ABCD với M, N, P, Q lần lượt là trung điểm DA, AB, BC và CD, vẽ tứ giác MNPQ.

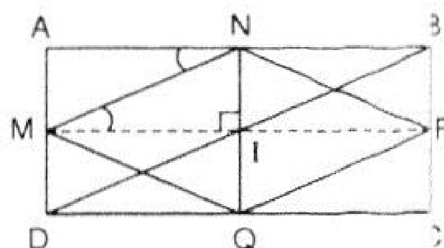
Tứ giác MNPQ là hình thoi vì:

$MN = NP = PQ = QM = \frac{BD}{2}$ (tính chất đường trung bình của tam giác).

Ta có $\Delta IMN = \Delta ANM$ (ch.gn)

$\Rightarrow S_{IMN} = S_{ANM}$

$\Rightarrow S_{IMN} = \frac{1}{2}S_{AMIN}$ (1)



Tương tự $S_{INP} = \frac{1}{2}S_{INBP}$ (2)

$S_{IQP} = \frac{1}{2}S_{IQCP}$ (3)

$S_{IQM} = \frac{1}{2} S_{IQDM}$ (4)

Cộng (1), (2), (3), (4) vế theo vế ta được: $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$

Vậy diện tích hình thoi MNPQ bằng nửa diện tích hình chữ nhật ABCD.

Ta có: $S_{MNPQ} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2} AB.BC = \frac{1}{2} MP.NQ$

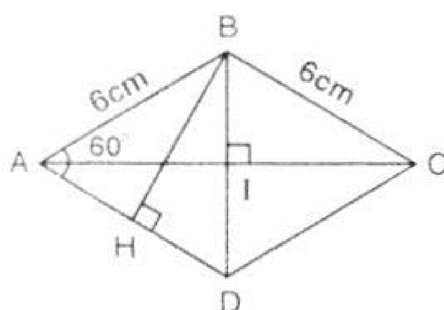
Vậy diện tích hình thoi bằng nửa tích hai đường chéo của nó.

35. Tính diện tích hình thoi có cạnh dài 6cm và một trong các góc của nó có số đo là 60^0.

Giải

Giả sử hình thoi ABCD có cạnh AB = 6cm và $\hat{A} = 60^0$.

Vẽ đường cao BH.



Ta có ΔABD cân tại D (vì AB = AD)

Và $\hat{A} = 60^0$

Vậy ΔABD là tam giác đều nên đường cao:

$$BH = \frac{AB.\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

Suy ra $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AD.BH = \frac{1}{2}.6.6.\,3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$ (cm^2)

Mà $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABD} = 2.9.\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ (cm^2)

Vậy $S_{ABCD} = 18\sqrt{3}$ cm^2

* *Cách khác:* ΔABD là tam giác đều nên BD = 6cm

Vì AI là đường cao của tam giác đều ABD nên:

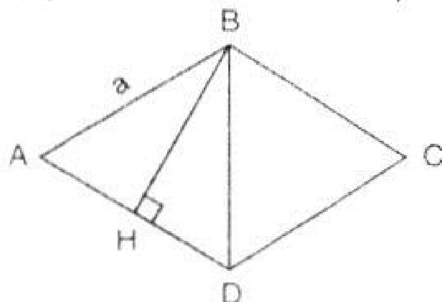
$$AI = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ (cm)} \Rightarrow AC = 2AI = 6\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

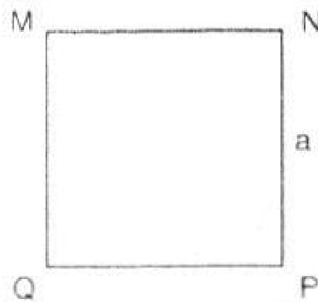
Ta có $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD = \frac{1}{2}.6\sqrt{6} = 18\sqrt{3}$ (cm^2)

36. Cho một hình thoi và một hình vuông có cùng chu vi. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn? Vì sao?

Giải

Giả sử ta vẽ hình thoi ABCD có cạnh là a và hình vuông MNPQ cũng có cạnh là a. Suy ra $CV_{ABCD} = CV_{MNPQ} = 4a$.





- Ta có $S_{MNPQ} = a^2$
- Từ đỉnh B của hình thoi ABCD ta vẽ đường cao BH có độ dài BH = h.

  Ta có $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}ah \Rightarrow S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2.\frac{1}{2}a.h = a.h$
- Trong ΔABD ta có đường cao BH ngắn hơn cạnh AB (do đường vuông góc nhỏ hơn đường xiên) hay $h \leq a$.

  $\Rightarrow$ $a.h \leq a^2$ (nhân hai vế với $a > 0$) hay $S_{ABCD} \leq S_{MNPQ}$

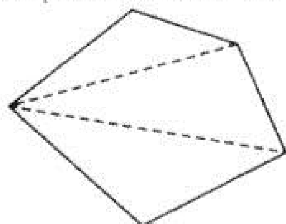
  Vậy diện tích hình vuông lớn hơn hoặc bằng hình thoi khi hai hình có chu vi bằng nhau. Dấu "=" xảy ra khi hình thoi trở thành hình vuông.

§6. DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

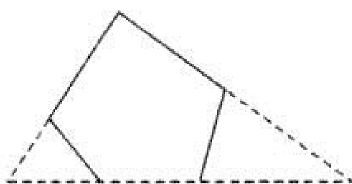
I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

* *Phương pháp chung:*

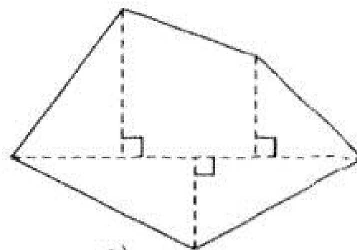
Để có thể tính diện tích của một đa giác bất kì ta thường chia các đa giác thành các tam giác hoặc tạo ra một tam giác nào đó có chứa đa giác. Do đó, việc tính diện tích của một đa giác bất kỳ thường được quy về tính diện tích các tam giác.



a)



b)



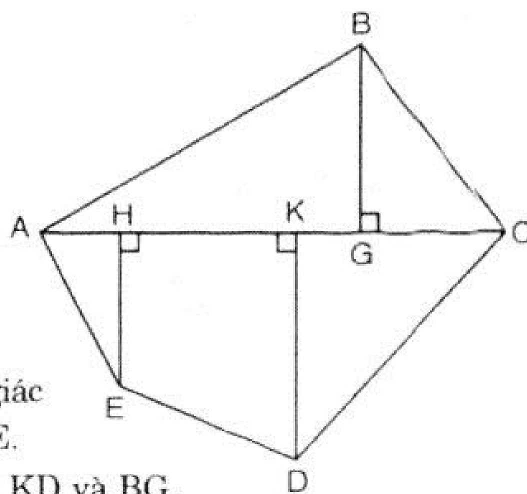
c)

- Trong một số trường hợp, để tính toán thuận lợi ta có thể chia đa giác thành nhiều tam giác vuông và hình thang vuông.

II. BÀI TẬP

A. Bài tập căn bản

37. Thực hiện các phép đo cần thiết (chính xác đến mm) để tính diện tích hình ABCDE (hình bên).



Hướng dẫn

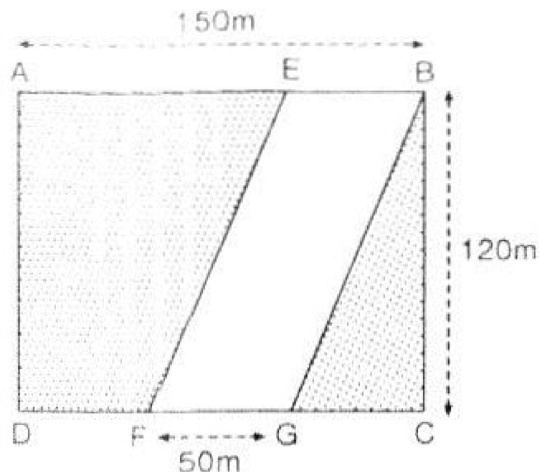
Ta chia đa giác ABCDE thành ΔABC, hai tam giác vuông AHE và DKC, hình thang vuông HKDE.

Ta đo các đoạn thẳng: AC, AH, HK, KC, EH, KD và BG.

Ta tính diện tích các tam giác: S_{ABC}, S_{AHE}, S_{DKC}, S_{HKDE}.

Tính tổng bốn diện tích trên ta được S_{ABCDE}.

38. Một con đường cắt một đám đất hình chữ nhật, với các dữ kiện được cho trên hình bên. Hãy tính diện tích phần con đường EBGF (EF // BG) và diện tích phần còn lại của đám đất.



Giải

- Con đường là một hình bình hành EBGF.

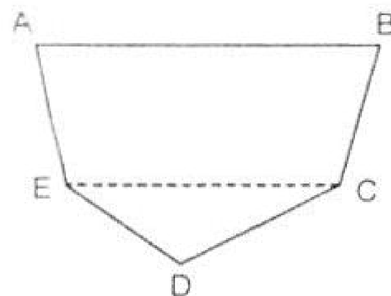
Ta có: EBGF là hình bình hành có chiều cao BC và đáy là FG.

$\Rightarrow S_{EBGF} = BC.FG = 120.50 = 6000\ (m^2)$

Vậy $S_{EBGH} = 6000\ m^2$.

- ABCD là hình chữ nhật nên: $S_{ABCD} = AB.CD = 150.120 = 18000\ (m^2)$
- Diện tích phần trồng trọt của đám đất là: $18000 - 6000 = 12000\ (m^2)$.

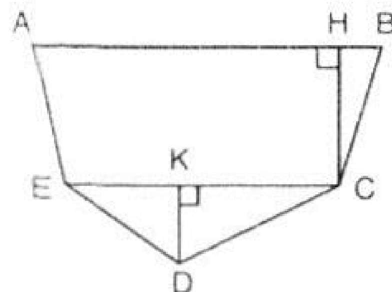
39. Thực hiện các phép vẽ và phép đo cần thiết để tính diện tích một đám đất có dạng như hình bên, trong đó AB // CE và được vẽ với tỉ lệ $\frac{1}{5000}$.



Hướng dẫn:

Ta chia đám đất ABCDE thành hình thang ABCE và tam giác ECD.

Ta vẽ thêm đường cao CH của hình thang ABCE và đường cao DK của ΔECD.



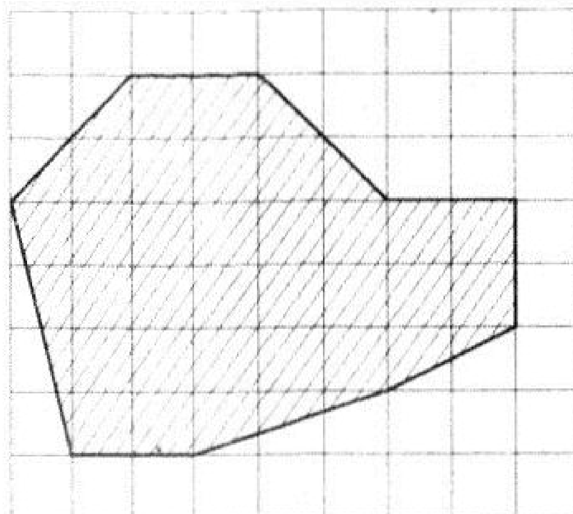
Ta đo các đoạn thẳng AB, CE, CH, DK

Ta tính S_{ABCD} và S_{ECD}

Cộng hai diện tích trên lại và nhân với 5000

(Vì bản đồ được vẽ với tỉ lệ $\frac{1}{5000}$)

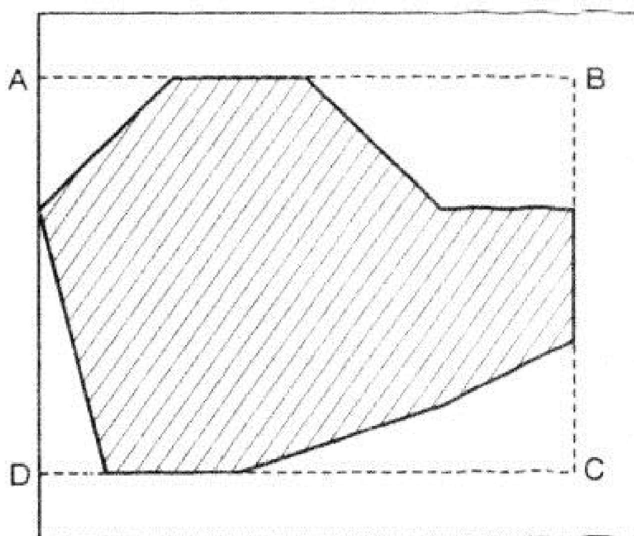
40. Tính diện tích thực của một hồ nước có sơ đồ là phần gạch sọc trên hình vẽ bên (cạnh của mỗi ô vuông là 1cm, tỉ lệ $\frac{1}{10000}$)



Giải

Ta vẽ hình chữ nhật ABCD chứa hồ bơi (phần gạch sọc) có kích thước 6(cm) và 8(cm).

Khi đó $S_{ABCD} = AB.BC = 8.6 = 48$ (cm^2)



Phần trắng còn lại trong hình chữ nhật ABCD có tổng cộng là 12,5 (ô vuông).

Vậy diện tích của bể bơi là:

$48 - 12,5 = 35,5$ (cm^2)

Vì bể bơi được vẽ theo tỉ lệ $\frac{1}{10000}$ nên diện tích thực của bể bơi là:

$35,5 \times 10000 = 355000$ (cm^2)
$= 35,5$ (m^2)

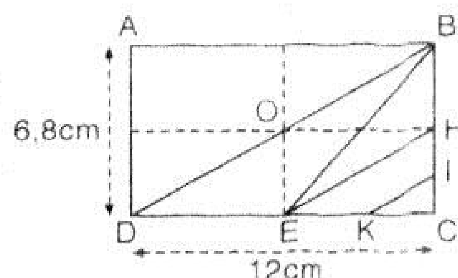
Đáp số: 35,5 m^2.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

41. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi H, I, E, K lần lượt là các trung điểm của BC, HC, DC, EC (hình bên). Tính:

a) Diện tích tam giác DBE.

b) Diện tích tứ giác EHIK.



Giải

a) Diện tích tam giác DBE.

Ta có: $S_{DBE} = S_{DBC} - S_{CBE}$

* Tam giác DBC vuông ở C có hai cạnh góc vuông là:

DC = 12 (cm); BC = 6,8 (cm)

Do đó $S_{DBC} = \frac{1}{2}DC.BC = \frac{1}{2}.12.6,8 = 40,8$ (cm^2)

* Tam giác CBE vuông tại C có hai cạnh góc vuông là:

$EC = \frac{DC}{2} = 6$(cm); BC = 6,8 (cm)

Do đó $S_{CBE} = \frac{1}{2}.EC.BC = \frac{1}{2}.6.6,8 = 20,4$ (cm^2)

Vậy $S_{DBE} = S_{DBC} - S_{CBE} = 40,8 - 20,4 = 20,4$ (cm^2)

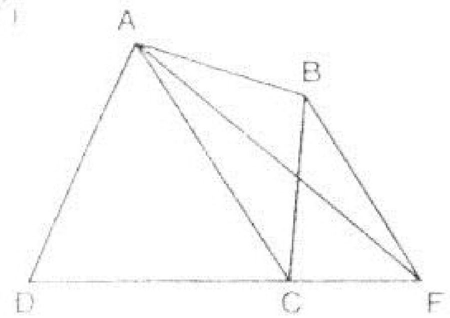
b) Diện tích tứ giác EHIK:

Ta có: $S_{EHIK} = S_{CHE} - S_{CKI}$

* $S_{CHE} = \frac{1}{2}.CH.CE = \frac{1}{2}\frac{6,8}{2}.\frac{12}{2} = 10,2$ (cm^2)

* $S_{CKI} = \dfrac{1}{2}CK.CI = \dfrac{1}{2}.\dfrac{6,8}{4}.\dfrac{12}{4} = 2,55\ (cm^2)$

Vậy $S_{EHIK} = 10,2 - 2,55 = 7,65\ (cm^2)$



42. Trên hình vẽ bên (AC // BF), hãy tìm tam giác có diện tích bằng diện tích của tứ giác ABCD.

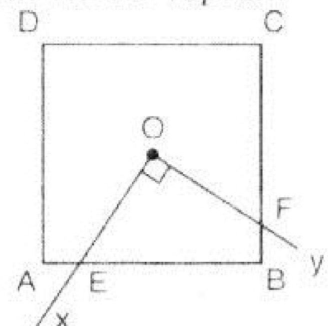
Giải

Ta có thể nêu bài toán cụ thể như sau: Cho tứ giác ABCD vẽ đường chéo AC. Từ B vẽ BF // AC (F nằm trên đường thẳng DC). Nối AF.

Ta tìm được ΔADF có diện tích bằng diện tích tứ giác ABCD.

* Chứng minh: Thật vậy, vì AC // BF nên khoảng cách từ B và F đến AC là bằng nhau, hơn nữa hai tam giác ABC và AFC có cùng cạnh AC. Do đó $S_{ABC} = S_{AFC}$. Ta có: $S_{ABCD} = S_{ADC} + S_{ABC} = S_{ADC} + S_{AFC} = S_{ADF}$

Vậy ta tìm được ΔADF có diện tích bằng diện tích tứ giác ABCD (đpcm).

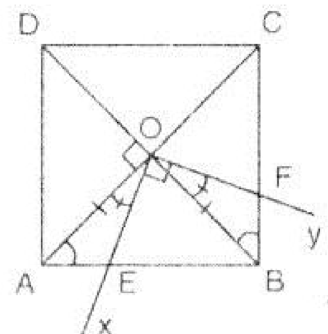


43. Cho hình vuông ABCD có tâm đối xứng O, cạnh a. Một góc vuông xOy có tia Ox cắt cạnh AB tại E, tia Oy cắt cạnh BC tại F (hình bên). Tính diện tích tứ giác OEBF.

Giải

Vẽ hai đường chéo AC và BD của hình vuông ABCD cắt nhau tại O. Chúng chia hình vuông ABCD ra bốn tam giác vuông bằng nhau, suy ra diện tích 4 tam giác đó cũng bằng nhau.

Vậy $S_{AOB} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} = \dfrac{1}{4}a^2$ (1)



\- Xét hai tam giác AOE và BOF, ta có:

$\widehat{OAE} = \widehat{OBF}$ (do $\Delta OAB = \Delta OBC$)

OA = OB (tính chất đường chéo hình vuông)

và $\left.\begin{array}{l}\widehat{AOE} + \widehat{EOB} = 90^0\\ \widehat{FOB} + \widehat{EOB} = 90^0\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AOE} = \widehat{FOB}$

Vậy $\Delta AOE = \Delta BOF$ (g-c-g) $\Rightarrow S_{AOE} = S_{BOF}$ (2)

\- Ta có: $S_{AOE} + S_{EOB} = S_{FOB} + S_{BOF}$ (cộng 2 vế của (2) với S_{EOB})

hay $S_{AOB} = S_{OEBF}$ (3)

\- Từ (1) và (3) ta có: $S_{OEBF} = \dfrac{1}{4}S_{ABCD} = \dfrac{1}{4}a^2$

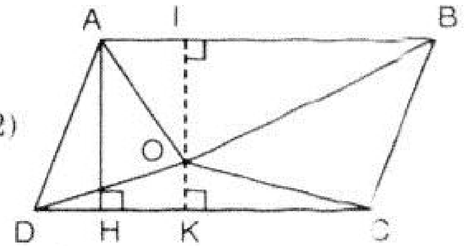
44. Gọi O là điểm nằm trong hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng tổng diện tích của hai tam giác ABO và CDO bằng tổng diện tích của hai tam giác BCO và DAO.

Giải

Qua O vẽ IK vuông góc với AB và DC ($I \in AB$, $K \in DC$).

Ta có: $S_{ABO} + S_{CDO} = \frac{1}{2}AB.OI + \frac{1}{2}CD.OK = \frac{1}{2}AB.OI + \frac{1}{2}AB.OK$

$= \frac{1}{2}AB(OI + OK) = \frac{1}{2}AB.IK = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (1)



Ta có: $S_{ABCD} = S_{ABO} + S_{CDO} + S_{BCO} + S_{DAO}$

$\Rightarrow S_{BCO} + S_{DAO} = S_{ABCD} - (S_{ABO} + S_{CDO})$

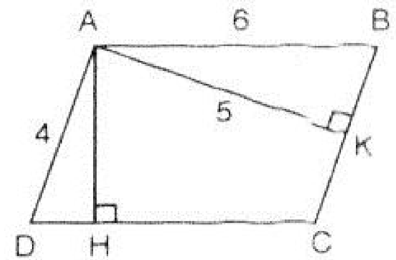
$= S_{ABCD} - \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$S_{ABO} + S_{CDO} = S_{BCO} + S_{DAO} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ (đpcm).

45. Hai cạnh của một hình bình hành có độ dài là 6cm và 4cm. Một trong các đường cao có độ dài là 5cm. Tính độ dài đường cao kia.

Giải



Ta có diện tích hình bình hành ABCD là:

$S_{ABCD} = AB.AH = BC.AK$ hay $6.AH = 4.AK$

Vì một đường cao có độ dài 5cm, thì đó phải là AK và $AK < AB$ ($5 < 6$), không thể là AH vì $AH < 4$.

Vậy $6AH = 4AK = 4.5 = 20 \Rightarrow AH = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$ (cm). Vậy $AH = \frac{10}{3}$ cm.

46. Cho tam giác ABC. Gọi M, N là các trung điểm tương ứng của AC, BC. Chứng minh rằng diện tích hình thang ABNM bằng $\frac{3}{4}$ diện tích của tam giác ABC.

Giải

Vẽ hai trung tuyến AN và BM của ΔABC. Ta có:

$S_{ABM} = S_{BMC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ (1) (vì đó đáy bằng nhau và cùng chiều cao).

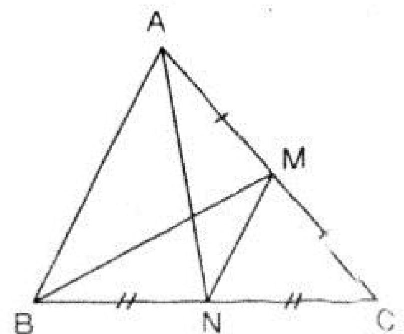
$S_{BMN} = S_{MNC} = \frac{1}{4}S_{ABC}$ (2) (vì có đáy bằng nhau và cùng chiều cao)

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta có:

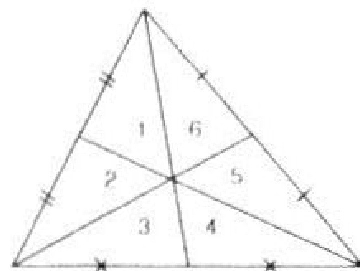
$S_{ABM} + S_{BMN} = \frac{1}{2}S_{ABC} + \frac{1}{4}S_{ABC}$

hay $S_{ABNM} = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}).S_{ABC}$

Vậy $S_{ABNM} = \frac{3}{4}S_{ABC}$ (đpcm).



47. Vẽ ba đường trung tuyến của một tam giác (hình bên). Chứng minh sáu tam giác: 1, 2, 3, 4, 5, 6 có diện tích bằng nhau.



Giải

Theo hình vẽ ta gọi tên sáu tam giác là 1, 2, 3, 4, 5 và 6.

Vì đường trung tuyến của tam giác chia cạnh đáy ra làm hai phần bằng nhau nên ta có: $S_1 = S_2$ (vì có đáy bằng nhau và cùng chiều cao) (1)

$S_3 = S_4$ (vì có đáy bằng nhau và cùng chiều cao) (2)

$S_5 = S_6$ (vì có đáy bằng nhau và cùng chiều cao) (3)

Ta còn có: $S_1 + S_2 + S_3 = S_4 + S_5 + S_6$ (vì chúng bằng $\frac{1}{2}S_{ABC}$) (4)

Thay (1), (2) và (3) vào (4) ta suy ra: $S_1 = S_6$ (5)

Ta cũng có: $S_1 + S_2 + S_6 = S_3 + S_4 + S_5 = (\frac{1}{2}S_{ABC})$ (6)

Thay (1), (2), (3) vào (6) ta suy ra được: $S_2 = S_3$ (7)

Kết hợp (1), (2), (3), (6) và (7) ta suy ra được:

$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$ (đpcm)

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

1. *Chọn câu trả lời đúng.*

(A) Hình thoi có bốn cạnh bằng nhau gọi là đa thức đều.

(B) Hình bình hành có hai cạnh bên bằng nhau gọi là đa giác đều.

(C) Hình thoi có bốn góc bằng nhau gọi là đa giác đều.

(D) Hình chữ nhật có bốn góc bằng nhau gọi là đa giác đều.

2. *Chọn câu trả lời đúng.* Tổng số đo các góc của hình đa giác bằng 1260°. Số cạnh của đa giác đó là :

(A) 7 cạnh (B) 8 cạnh (C) 9 cạnh (D) 10 cạnh.

3. *Chọn câu trả lời đúng.* Hình chữ nhật có chiều dài là a, chiều rộng là b. Nếu chiều dài tăng 4 lần, chiều rộng giảm 2 lần thì diện tích hình chữ nhật là :

(A) Tăng 4 lần (B) Giảm 2 lần (C) Tăng 2 lần (D) Giảm 4 lần.

4. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho tam giác ABC cân tại A, có AB = AC = 15cm; BC = 18 cm. Diện tích tam giác đó là :

(A) 66 cm^2 (B) 135 cm^2 (C) 180 cm^2 (D) 108 cm^2.

5. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho hình thang có đáy lớn là 10 cm, chiều cao 8 cm và diện tích 72 cm^2. Độ dài đáy nhỏ là :

(A) 9 cm (B) 8 cm (C) 7,2 cm (D) 7 cm.

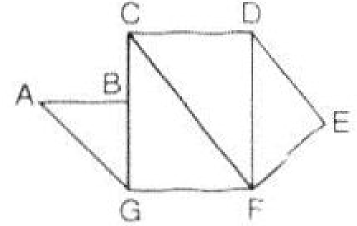
6. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho hình thoi ABDC có cạnh bằng 8 dm. $\widehat{ABD} = 30^\circ$. Diện tích hình thoi đó là :

(A) 23 dm^2 (B) 16 dm^2 (C) 32 dm^2 (D) 64 dm^2.

7. *Chọn câu trả lời đúng.* Cho hình thoi MNPQ có MP = 12 dm, diện tích bằng 96 dm^2. Độ dài cạnh hình thoi đó là :

(A) 10 dm (B) 16 dm (C) 8 dm (D) 18 dm.

8. *Tìm câu trả lời sai.* Cho hình bên :



(A) $S_{ABCFG} = S_{ABG} + S_{CFG}$

(B) $S_{CDEFG} = S_{ABG} + S_{CDEF}$

(C) $S_{CFG} = S_{CDEFG} - S_{CDEF}$

(D) $S_{ABCDEFG} = S_{ABG} + S_{CFG} + S_{CDEF}$.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

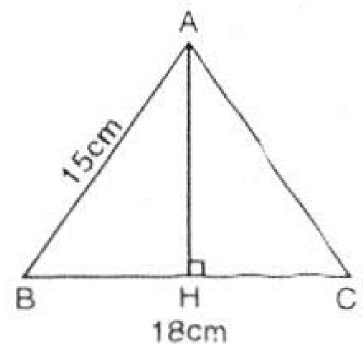
1. *Chọn câu C.*

2. Áp dụng công thức : $(n-2)180^\circ = 1260^\circ \Rightarrow n = 9$. *Chọn câu C.*

3. Diện tích hình chữ nhật ban đầu : a.b (a : chiều dài, b : chiều rộng).

Sau khi chiều dài tăng 4 lần, chiều rộng giảm 2 lần: $4.a.b.\frac{b}{2} = 2.a.b$

Vậy diện tích hình chữ nhật tăng 2 lần. *Chọn câu C.*



4. $$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 - BH^2}.BC = \frac{1}{2}\sqrt{15^2 - 9^2}.18$$

Vậy $S_{ABC} = 108cm^2$.

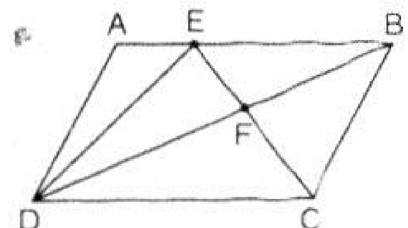
Chọn câu D.

5. $S_{\text{hình thang}} = \frac{(a+b)h}{2}$. *Chọn câu B.*

6. *Chọn câu A.*

7. $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MP.NQ \Rightarrow NQ = \frac{2.S_{MNPQ}}{MP} = \frac{2.96}{12} = 16$

$\Rightarrow$ Cạnh của MNPQ = $\sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$. *Chọn câu A.*



8. $S_{CDEFG} = S_{CFG} + S_{CDEF}$

Chọn câu B.

MỤC LỤC

PHẦN ĐẠI SỐ

PHẦN HÌNH HỌC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

Điện thoại : (04) 3971 4896; (04) 3972 4770 - Fax : (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc : **PHÙNG QUỐC BẢO**

Tổng biên tập : **PHẠM THỊ TRÂM**

Biên tập : Quốc Trung

Sửa bài : Đặng Thị Bình

Trình bày : Diệu Tâm

Bìa : Công ty Sách Hoa Hồng

Đối tác liên kết xuất bản : Công ty Sách Hoa Hồng

GIẢI BÀI TẬP TOÁN 8 - Tập một

Mã số : 1L-67ĐH2009

In 5000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty Cổ Phần In Tiền Giang.

Số xuất bản: 253-2009/CXB/21-41/ĐHQGHN ngày 25/03/2009.

Quyết định xuất bản số : 67 LK-TN/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2009.